

DAS ENTSCHEIDUNGSPROBLEM DER
PRÄDIKATENLOGIK 1. STUFE MIT IDENTITÄT
UND FUNKTIONSZEICHEN IN HERBRANDFORMELN

Martin Wirsing

—

1976

Das Entscheidungsproblem der
Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität
und Funktionszeichen in Herbrandformeln

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von Martin Wirsing
aus Bayreuth

im Mai 1976



1. Berichterstatter: Professor Dr. Kurt Schütte
 2. Berichterstatter: Privatdozent Dr. Horst Osswald,
wiss. Rat und Professor
- Tag der mündlichen Prüfung: 2. August 1976

V o r w o r t

Herrn Prof. Dr. Kurt Schütte möchte ich für die Vergabe dieser Arbeit, für seine Anregungen und seine wohlwollende Betreuung herzlich danken.

Herrn Dr. Horst Osswald danke ich für seinen unermüdlichen Ansporn und seine mathematische Unterstützung; Herrn Dr. Egon Börger für eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen bei den Reduktionstypen.

Meiner Frau danke ich für ihr Verständnis und ihre Hilfsbereitschaft, mit der sie mir die Abfassung dieser Arbeit sehr erleichtert hat.

Frau Gisela Bedrich danke ich für die äußerst sorgfältige und geduldige Übertragung des handgeschriebenen Textes in Maschinenschrift.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhaltsübersicht

Seite

Einleitung

§ 1 Einführende Definitionen 1

Konservative Reduktionsklassen in Herbrandformeln

§ 2 Beschränkung auf wenige Funktionsvariablen 10

§ 3 $\forall^3(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(3)$ ist ein konservativer
Reduktionstyp 14

§ 4 $\forall(\emptyset; f^1, g^1) \wedge \text{Her}(4)$ und $\forall(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(4)$ sind
konservative Reduktionstypen 28

§ 5 $\forall^6(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(2)$ ist ein konservativer
Reduktionstyp 38

Entscheidbarkeit von $\text{alle}(\text{alle}; f^1) \wedge \text{Her}(\infty)$

§ 6 Reduktion der Formeln aus $\text{alle}(\text{alle}; f^1) \wedge \text{Her}(\infty)$
auf Formeln einfacherer Gestalt 46

§ 7 Die Systeme R, S und S^+ 51

§ 8 Entscheidbarkeit von R 62

§ 9 Beziehungen zwischen R und S 72

§10 Eigenschaften normaler Terme 79

§11 Das Entscheidungsverfahren für die Klasse
 $\text{alle}(\text{alle}; f^1) \wedge \text{Her}(\infty)$ 84

§12 Anhang: Entscheidbarkeit der Klassen K und
 $S_y \subseteq \exists^\infty \forall^2 \exists^\infty (\text{alle}; \emptyset)$ 103

Literaturverzeichnis 116

E i n l e i t u n g

Diese Arbeit liefert einen Beitrag zum Entscheidungsproblem der klassischen Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Funktionszeichen (PLIF). Betrachtet werden Herbrandformeln. Das sind pränexen Formeln, deren Matrix (quantorenfreier Teil der Formel) aus einer Konjunktion von negierten oder nichtnegierten Primformeln besteht. Arten von Herbrandformeln werden je nach Länge und Gestalt des Präfixes, der Anzahl der Primformeln und der Anzahl und Stellenzahl der Funktionszeichen in entscheidbare oder unentscheidbare Klassen eingeteilt.

Das Entscheidungsproblem (bzgl. der Erfüllbarkeit) befaßt sich mit der Frage, ob es zu einer Klasse von Formeln ein effektives Verfahren gibt, mit dessen Hilfe man für jede Formel einer solchen Klasse entscheiden kann, ob sie erfüllbar ist oder nicht.

Seit der von Church und Turing [Chu, Tu] nachgewiesenen (rekursiven) Unentscheidbarkeit der klassischen Prädikatenlogik (PL) hat man das Entscheidungsproblem von zwei Seiten her betrachtet: Man hat versucht, Entscheidungsverfahren für möglichst komplizierte Formelklassen aufzustellen und Unentscheidbarkeitsbeweise für möglichst einfache Formelklassen zu finden.

Für die PL (ohne Identität und Funktionszeichen) ist dieses Problem gelöst worden, wenn man nur nach Präfixtypen unterscheidet, d.h. nach Anzahl und Anordnung der Quantoren. Dieses geht aus Arbeiten von Gödel, Kalmar, Schütte, Büchi, Kahr, Moore und Wang hervor.

In der Prädikatenlogik mit Identität (PLI) ohne Funktionszeichen bleibt bzgl. der Präfixtypen noch ein einziger Fall offen: nämlich die Klasse der $\exists^\infty \forall^2 \exists^\infty$ -Formeln.

Im Anhang dieser Arbeit werden für zwei Spezialfälle dieser Klasse Entscheidungsverfahren angegeben.

Neben dem Quantorenkriterium (a) gibt es noch andere Kriterien, nach denen man Formelmengen bzgl. der Entscheidbarkeit klassifizieren kann:

- b) Stellenzahl und Anzahl der in der Matrix auftretenden Prädikatenvariablen,
- c) Art der Interpretation der Prädikatenvariablen (z.B. Identität, Äquivalenz-, Ordnungsrelation),
- d) Kombinationen von Objektvariablen in den Primformeln,
- e) Gestalt der Matrix (konjunktive, disjunktive Normalform, Länge der Disjunktionen und Konjunktionen),
- f) Anzahl und Stellenzahl der auftretenden Funktionsvariablen,
- g) Anzahl der Primformeln.

Für die Lösung des Problems e) wurde ein wichtiger Schritt von Chang und Keisler getan: Sie zeigten, daß in PL jede Formel zu einer Formel in konjunktiver Normalform äquivalent ist, in der grob gesagt jede Konjunktion höchstens 3 Disjunktionsglieder enthält, und daß das gleiche in PLI mit höchstens 2 Disjunktionsgliedern gilt.

Daraufhin untersuchten Krom, Aanderaa, Maslov, Börger und Lewis das Entscheidungsproblem für Klassen von Formeln der Prädikatenlogik ohne Identität in konjunktiver Pränexnormalform und höchstens zwei Disjunktionsgliedern. Diese Formeln nennt man Kromformeln; analog für den Fall der Prädikatenlogik mit Identität untersuchte man das Entscheidungsproblem für konjunktive Pränexnormalform mit einem Disjunktionsglied. Diese Formeln werden Herbrandformeln genannt.

Herbrand hatte 1930 [He, Go] dafür ein Entscheidungsverfahren angegeben; Gladstone verschärfte dieses Ergebnis

1966, indem er die endliche Entscheidbarkeit dieser Klasse nachwies [Gla] .

In der Prädikatenlogik mit Identität ist die Klasse der Herbrandformeln ein konservativer Reduktionstyp, d.h. sie ist unentscheidbar. Dies ist ein Ergebnis dieser Arbeit.

Eine Formelmenge M ist in etwa ein Reduktionstyp, wenn jede Formel der PL erfüllbarkeitsäquivalent zu einer Formel aus M ist.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden bzgl. der Kriterien a), f) g) einfache Reduktionstypen in Herbrandformeln angegeben.

Die Methode beruht, wie schon bei Turing [Tu] und Büchi [Bü], auf der Idee, unentscheidbare Formelklassen dadurch zu erhalten, daß als unentscheidbar erkannte, mit Turingmaschinen zusammenhängende (Halte-) Probleme in prädikatenlogische Formeln mit äquivalenten Erfüllbarkeitseigenschaften übersetzt werden. Nur werden hier wie bei Aanderaa und Börger [Aan, B01, B03] anstelle der Turingmaschinen zu diesen äquivalente 2-Register-Maschinen verwendet. Deren Definition und Eigenschaften findet man in § 1. Dort wird auch ein Satz von Gurevic [Gu3] zitiert, mit dessen Hilfe man sich für den Beweis der Konservativität eines Reduktionstyps viel Arbeit ersparen kann (Satz 1.5.4).

In § 2 wird gezeigt, daß sich in jeder Allformel F die Anzahl der n -stelligen Funktionsvariablen ($n \in \mathbb{N}$) auf eine einzige 2-stellige Funktionsvariable senken läßt, ohne daß man die Anzahl der Primformeln von F erhöhen muß. Ebenso lassen sich beliebig viele, in F auftretende 1-stellige Funktionsvariablen auf zwei 1-stellige Funktionsvariablen reduzieren.

In § 3 wird bewiesen, daß die Klasse $\forall^3(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(3)$ (d.i. die Klasse der Herbrandformeln mit 3 Allquantoren, 0 Prädikatenvariablen, einer 2-stelligen Funktionsvariablen und 3 Primformeln) ein konservativer Reduktionstyp ist. Das geschieht dadurch, daß wir jede 2-Register-Maschine M durch mehrere 1-stellige Funktionsvariablen kodieren und jede Konfiguration von M mithilfe weiterer (1- und 2-stelliger) Funktionsvariablen durch Terme beschreiben. Mit einer Ungleichung drücken wir dann aus, daß die Anfangskonfiguration verschieden von jeder Endkonfiguration ist, also nicht in eine Endkonfiguration übergehen kann.

Eine Gleichung [1] beschreibt die möglichen Befehle von M und eine weitere Gleichung [2] (mit 2-stelligen Funktionsvariablen) ist dazu da, die jeweiligen Konfigurationsterme so zu verändern, daß der durch Anwendung von Gleichung [1] (und nochmaliger Anwendung von [2] in der anderen Richtung) entstandene Term genau die Nachfolgekonfiguration repräsentiert.

In § 4 werden durch nochmalige Kodierung der Formel von § 3 und durch Ersetzen von [2] durch zwei Gleichungen zwei Allquantoren und die zweistelligen Funktionsvariablen eliminiert. Daraus folgt, daß die Klassen $\forall(\emptyset; f^1, g^1) \wedge \text{Her}(4)$ und $\forall(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(4)$ konservative Reduktionstypen sind.

Weil wir für den Beweis, daß $\forall^6(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(2)$ ein konservativer Reduktionstyp ist, nur eine Gleichung und eine Ungleichung zur Verfügung haben, werden in dieser einen Gleichung sofort die Übergänge zwischen den einzelnen Konfigurationen kodiert und nicht mehr die Instruktionen beschrieben, wodurch allerdings die Zahl der Allquantoren steigt.

Die Entscheidbarkeit der Klasse $\text{alle}(\text{alle}; f^1) \cap \text{Her}(\infty)$ wird in § 6-11 bewiesen. Durch die Umformung in § 6 der Formeln dieser Klasse entstehen Gleichheitsformeln G mit mehrstelligen Funktionsvariablen, also eine Klasse, die nach §2-5 im allgemeinen Fall unentscheidbar ist. Allerdings haben die neuen Terme eine so übersichtliche Schachtelung der Funktionsvariablen, daß man trotzdem die Entscheidbarkeit nachweisen kann.

In § 7 werden die in G auftretenden Gleichungen als Axiome aufgefaßt und drei Kalküle R , S und S^+ vorgestellt, mit denen man alle (S) oder einen Teil (R) der aus diesen Axiomen folgenden Primformeln erschließen kann. Dabei haben alle in G vorkommenden Terme die Gestalt von Termen aus R .

In § 8 wird gezeigt, daß für jeden Term u aus R und jede m -stellige Funktionsvariable φ aus R entscheidbar ist, für welche Zahlen $q \in \mathbb{N}_0$ $u = f^q \varphi(a_1, \dots, a_m)$ in R ableitbar ist ($a_1, \dots, a_m$ Objektvariablen).

Die Brücke zwischen R und S wird in § 9 geschlagen. Es wird bewiesen, daß Gleichungen zwischen Termen aus R genau dann in S ableitbar sind, wenn sie in R ableitbar sind.

In § 10 werden normale Terme untersucht; das sind Terme, die bzgl. der Gleichheit in R die geringstmögliche Schachtelung aufweisen.

Mit Hilfe der in § 10 bewiesenen Eigenschaften lassen sich aus der Formel G zwei Formeln G_1 und G_2 gewinnen, so daß gilt:

G erfüllbar $\Leftrightarrow G_1$ erfüllbar oder G_2 erfüllbar.

Die Formeln G_1 und G_2 sind äquivalent zu Formeln aus der monadischen Prädikatenlogik mit einer einstelligen Funktionsvariablen, die nach Rabin entscheidbar ist.

Zusammen mit zwei Entscheidbarkeitsergebnissen von Gurevic und Gladstone [Gu3,Gla] ergibt sich folgende Tabelle:

Entscheidbarkeit in Herbrandformeln	
<u>entscheidbar sind:</u>	
$\exists^\infty(\text{alle}; \text{alle})$	[Gu3]
$\text{alle}(\text{alle}; f^1) \wedge \text{Her}(\infty)$	
$\text{alle}(\text{alle}; \text{alle}) \wedge \text{Her}(1)$	[Gla]
<u>konservative Reduktionstypen sind:</u>	
$\forall^6(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(2)$	
$\forall^3(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(3)$	
$\forall(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(4)$	
$\forall(\emptyset; f, g^1) \wedge \text{Her}(4)$	

Im Anhang weise ich die (endliche) Entscheidbarkeit zweier Teilklassen der $\exists^\infty \forall^2 \exists^\infty$ -Formeln in der PLI nach. Der Beweis verwendet ein Verfahren von Schütte [Schü4], dessen Terminierung mit Hilfe geeigneter Gradzuweisungen gezeigt werden kann.

§ 1 Einführende Definitionen

1.1 Vereinbarungen und Bezeichnungen

Vereinigung, Durchschnitt und Produkt zweier Mengen bezeichnen wir mit $\cup, \cap, \times$, die iterierte Vereinigung mit $\bigcup$, das n-fach iterierte Produkt $\underbrace{Mx \dots xM}_{n\text{-mal}}$ einer Menge M mit M^n . Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die leere Menge, mit $\mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die in der Theorie der ganzen Zahlen und der Mengenlehre üblichen Funktionen und Relationen "Summe", "Produkt", "Differenz", "Potenz" ("hoch k "), "modulo k ", "Minimum", "Maximum", "kleiner", "kleiner-gleich", "Gleichheit", "Elementment von", "Komplement von", "Teilmenge von" bezeichnen wir resp. mit $+$, $\cdot$, $-$, k , $\text{mod } k$, $\min$, $\max$, $<$, $\leq$, $=$, $\in$, $\setminus$, $\subseteq$. Das Relationszeichen " $=$ " benützen wir auch in der formalen Sprache. Die jeweilige Verwendung von " $=$ " in der formalen oder in der Metasprache ist aber immer sofort aus dem Kontext zu erkennen. Wir schreiben $a \equiv b$, wenn die Zeichenreihen a und b übereinstimmen.

Endliche Zeichenfolgen $x_1, \dots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) kürzen wir mit $\vec{x}$ ab. Wird in einer Zeichenreihe A ein Zeichen x an allen Stellen durch ein Zeichen y ersetzt, so schreiben wir $A(\vec{y})$. Die simultane Ersetzung von $x_1, \dots, x_n$ durch $y_1, \dots, y_n$ bezeichnen wir durch $A(\vec{y}_1 :: \vec{y}_n)$ oder kürzer durch $A(\vec{y})$, falls $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ gilt. Ist eindeutig, welches Zeichen durch y ersetzt wird, so schreiben wir $A(y)$.

Metalogische Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz kürzen wir respektive durch $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ab, metalogische All- und Existenzquantoren durch $\forall$, $\exists$.

1.2 Die Sprache PLIF der Prädikatenlogik

1. Stufe mit Identität und Funktionszeichen.

Grundzeichen sind abzählbar viele freie und gebundene Objektvariablen, zu jeder Stellenzahl $n \in \mathbb{N}$ abzählbar viele freie Prädikatenvariablen, die Prädikatenkonstante $=$, zu jeder Stellenzahl $n \in \mathbb{N}_0$ abzählbar viele freie Funktionsvariablen, $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$, runde Klammern, Kommas.

In üblicher Weise werden die Terme aus freien Objektvariablen und Funktionsvariablen gebildet; aus den Termen, den Prädikatenvariablen, $=, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ mit gebundener Objektvariable werden die Formeln zusammengesetzt.

Primformeln sind Formeln der Gestalt $P(s_1, \dots, s_n)$ oder $s=t$ (P Prädikatenvariable, $s, t, s_1, \dots, s_n$ Terme).

Basisformeln sind negierte oder nichtnegierte Primformeln.

Wir verwenden die üblichen Klammersparnisregeln für Formeln, definieren $\bigwedge_{i=1}^n A_i := T$, $\bigvee_{i=1}^n A_i := \perp$ und schreiben

$\bigwedge_{i=1}^n A_i$ bzw. $\bigvee_{i=1}^n A_i$ ($n \in \mathbb{N}$) für $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ bzw. $A_1 \vee \dots \vee A_n$.

Läßt man in der Sprache die Funktionsvariablen weg, so erhält man die Prädikatenlogik PLI 1. Stufe mit Identität; läßt man auch die Prädikatenkonstante $=$ weg, erhält man das System PL der klassischen Prädikatenlogik.

1.3 Semantik der PLIF

Individuenbereich, Belegung, I-Term und I-Formel bzgl. eines Individuenbereichs I, der Wahrheitswert BF einer I-Formel F bzgl. einer Belegung B seien in üblicher Weise definiert [Schü 3, KK]. Insbesondere sei die Prä-

dikatenkonstante = immer genau in der Diagonale
 $\{(x,x) | x \in I\} \subseteq I^2$ des Individuenbereichs I erfüllt.

Eine Struktur ist ein Paar $(I, \mathcal{B})$, bestehend aus einem Individuenbereich I und einer Belegung $\mathcal{B}$. Eine Formel F heißt gültig in einer Struktur $(I, \mathcal{B})$, wenn $\mathcal{B}F = \text{wahr}$ gilt. $(I, \mathcal{B})$ heißt dann Modell von F . Eine Formel F heißt (endlich) erfüllbar in I , wenn es ein (endliches) Modell $(I, \mathcal{B})$ von F gibt. F heißt erfüllbar (bzw. allgemeingültig), wenn F in einer (bzw. jeder) Struktur gültig ist. Zwei Formeln F und G heißen erfüllbarkeitsgleich, wenn sie in den gleichen Individuenbereichen erfüllbar sind.

Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir in einer Struktur $(I, \mathcal{B})$ f oder $\underline{f}$... statt $\mathcal{B}f$ und $P, \underline{P}$ statt $\mathcal{B}P$ für Funktionsvariablen f und Prädikatenvariablen P . Außerdem listen wir in einer Struktur nur die wirklich benötigten Funktions- und Prädikatenvariablen auf.

1.4 Formelklassen der PLIF

1.4.1 Pränexe Formeln, geschlossene Formeln

Eine pränexe Formel F ist eine Formel der Gestalt

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n A(x_1, \dots, x_n), \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

wobei $Q_1, \dots, Q_n$ Quantoren sind und $A(a_1, \dots, a_n)$ (a_i freie Objektvariablen) eine quantorenfreie Formel ist.

$Q_1 \dots Q_n$ heißt Präfix von F , A Matrix von F .

Eine geschlossene Formel ist eine Formel ohne freie Variablen.

1.4.2 Präfix-, Funktions-, Prädikatsfolgen

- (1) Eine Präfixfolge Π hat genau eine der folgenden Gestalten:

$\Pi \equiv \emptyset$, $\Pi \equiv \text{alle}$ oder $\Pi \equiv Q_1^{n(1)} \dots Q_k^{n(k)}$ mit
 $Q_1, \dots, Q_k \in \{\forall, \exists\}$, $k \in \mathbb{N}$, $n(1), \dots, n(k) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- (2) Eine Prädikatsfolge ϕ hat genau eine der folgenden Gestalten:

$\phi \equiv \emptyset$, $\phi \equiv \text{alle}$ oder $\phi \equiv P_1^{l(1)}, \dots, P_m^{l(m)}$, wobei
 $P_i^{l(i)}$ ($i=1, \dots, m$; $m \in \mathbb{N}$) $l(i)$ -stellige Prädikatenvariablen sind.

- (3) Eine Funktionsfolge Ψ hat genau eine der folgenden Gestalten:

$\Psi \equiv \emptyset$, $\Psi \equiv \text{alle}$ oder $\Psi \equiv f_1^{h(1)}, \dots, f_n^{h(n)}$, wobei
 $f_i^{h(i)}$ ($i=1, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$) $h(i)$ -stellige Funktionsvariablen sind.

1.4.3 Die Formelklassen $\Pi(\phi; \Psi)$

Sei Π eine Präfix-, ϕ eine Prädikats-, Ψ eine Funktionsfolge.

$\Pi(\phi; \Psi)$ ist die Menge der pränexen PLIF-Formeln F mit folgenden Eigenschaften:

- a) Falls $\Pi \equiv \emptyset$ oder $\Pi \equiv Q_1^{n(1)} \dots Q_k^{n(k)}$, so ist das Präfix von F leer oder gleich

$Q_1^{m(1)} \dots Q_k^{m(k)}$ mit $m(i) \leq n(i)$ für $i=1, \dots, k$;

- b) falls $\phi \equiv \emptyset$ oder $\phi \equiv P_1^{l(1)}, \dots, P_m^{l(m)}$, so treten in F höchstens die in ϕ aufgelisteten Prädikatsvariablen auf;

- c) falls $\Psi \equiv \emptyset$ oder $\Psi \equiv f_1^{h(1)}, \dots, f_n^{h(n)}$, so treten in F höchstens die in Ψ aufgelisteten Funktionsvariablen auf;

- d) falls $\Pi \equiv \text{alle}$ (bzw. $\phi \equiv \text{alle}$, bzw. $\Psi \equiv \text{alle}$),

so kann in F ein beliebiges Präfix (bzw. beliebige Prädikatsvariablen, bzw. beliebige Funktionsvariablen) auftreten.

1.4.4 Herbrandformeln

- (1) Herbrandformeln der Länge k ($k \in \mathbb{N}$):

$\text{Her}(k) := \{F \mid F \text{ ist pränexe PLIF-Formel mit einer Matrix der Form}$

$$G_1 \wedge \dots \wedge G_1 \quad (1 \leq i \leq k \text{ und } 1 \in \mathbb{N}),$$

wobei $G_1, \dots, G_1$ Basisformeln sind $\}$.

- (2) $\text{Her}(\infty) := \{F \mid \exists k \in \mathbb{N} (F \in \text{Her}(k))\}.$

1.4.5 Beispiele

- (1) alle (alle; $\emptyset$) ist die Menge aller pränexen PLI-Formeln, d.h. Formeln ohne Funktionsvariablen;
- (2) $\emptyset$ (alle; alle) ist die Menge der quantorenfreien PLIF-Formeln,
- (3) $\text{Her}(1)$ ist die Menge derjenigen pränexen Formeln, deren Matrix aus einer einzigen Basisformel besteht.

1.5 Entscheidbarkeit, Reduktionsklassen

1.5.1 Entscheidbarkeit

- (1) Eine Menge M heißt entscheidbar bzgl. einer Eigenschaft E , wenn es ein effektives Verfahren gibt, mit dessen Hilfe man für jedes Element aus M feststellen kann, ob es die Eigenschaft E hat oder nicht.
- (2) Falls im folgenden die Eigenschaft nicht genannt wird, so ist immer die Entscheidbarkeit bzgl. der Erfüllbarkeit gemeint.

1.5.2 Reduktionstypen

- (1) Eine Teilmenge K der PLIF heißt Reduktionstyp, wenn es eine rekursive [Hs 2] Funktion $f : \text{PLIF} \rightarrow K$ gibt, so daß für alle $F \in \text{PLIF}$ gilt:
 - a) F erfüllbar $\Rightarrow f(F)$ erfüllbar;
 - b) $f(F)$ erfüllbar $\Rightarrow F$ erfüllbar.
- (2) K heißt konservativer Reduktionstyp, wenn es eine rekursive Abbildung $f : \text{PLIF} \rightarrow K$ gibt, so daß a), b) und außerdem c), d) gelten:
 - c) F endlich erfüllbar $\Rightarrow f(F)$ endlich erfüllbar;
 - d) $f(F)$ endlich erfüllbar $\Rightarrow F$ endlich erfüllbar;
- (3) K heißt semikonservativer Reduktionstyp, wenn es eine rekursive Abbildung $f : \text{PLIF} \rightarrow K$ gibt, so daß b) und c) gelten.

1.5.3 Folgerung

Jeder Reduktionstyp ist unentscheidbar.

1.5.4 Satz von Gurevich (1974)

Jeder semikonservative Reduktionstyp ist konservativ.

1.6 2-Register-Maschinen [Mil,2]

- (1) Eine 2-Register-Maschine M (2-RM) ist eine endliche Folge $(I_1, \dots, I_r)$ von Instruktionen; die Zahlen $1, \dots, r$ heißen Zustände von M ($r \in \mathbb{N}$).
- (2) M kann folgende Elementarbefehle ausführen $(i, j, k \in \{1, \dots, r\}; l \in \{1, 2\})$:
 - a) $I_i = a_l[j], i \{r-1, r\}$:
Im Zustand i addiert M $+1$ im l -ten Register und geht in den Zustand j über.

b) $I_i = s_1[j, k], i \in \{r-1, r\} :$

Ist im Zustand i das l -te Register leer, so geht M in den Zustand j über; sonst wird im l -ten Register 1 subtrahiert und in den Zustand k übergegangen.

c) $I_{r-1} = I_r = H :$

Im Zustand $r-1$ (bzw. r) stoppt die Maschine.

(3) Wir beschreiben die Konfigurationen einer 2-RM M durch Tripel aus $\{1, \dots, r\} \times \mathbb{N}_0^2$ und die Elementaroperationen folgendermaßen:

Für alle $i, j, k = 1, \dots, r$ und $p, q \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- a) $(i, p, q) \vdash_1 (i, p+1, q)$, falls $I_i = a_1[j]$;
- b) $(i, p, q) \vdash_1 (i, p, q+1)$, falls $I_i = a_2[j]$;
- c) $(i, 0, q) \vdash_1 (j, 0, q)$ und $(i, p+1, q) \vdash_1 (k, p, q)$,
falls $I_i = s_1[j, k]$;
- d) $(i, p, 0) \vdash_1 (j, p, 0)$ und $(i, p, q+1) \vdash_1 (k, p, q)$,
falls $I_i = s_2[j, k]$.

(4) Ausgehend von $\vdash_1$ definieren wir die Relationen

$\vdash_n$ und $\vdash$ für $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$, $i, j = 1, \dots, r$ und

$p, q, p', q' \in \mathbb{N}_0 :$

- a) $(i, p, q) \vdash_0 (j, p', q')$, falls $(i, p, q) = (j, p', q')$.
- b) $(i, p, q) \vdash_{m+1} (j, p', q')$ ($m \in \mathbb{N}_0$), wenn gilt:

Es gibt eine Folge $((i_k, p_k, q_k)) \subseteq \{1, \dots, r\} \times \mathbb{N}_0^2$
mit $k = 0, \dots, m+1$, so daß gilt:

- i) $(i_0, p_0, q_0) = (i, p, q)$;
- ii) $(i_k, p_k, q_k) \vdash_1 (i_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1})$ für
 $k = 0, \dots, m$;
- iii) $(i_{m+1}, p_{m+1}, q_{m+1}) = (j, p', q')$.

- c) $(i, p, q) \vdash (j, p', q') : \Leftrightarrow$ Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit
 $(i, p, q) \vdash_n (j, p', q')$.

(5) Die Relationen $\sim_n, \sim, \vdash_n, \vdash, \hat{\sim}_n, \hat{\sim}$:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}; i, j = 1, \dots, r; p, q, p', q' \in \mathbb{N}_0$ sei

a) $(i, p, q) \sim_0 (j, p', q') : \Leftrightarrow (i, p, q) = (j, p', q')$.

b) $(i, p, q) \sim_1 (j, p', q') : \Leftrightarrow$

Es gilt: $(i, p, q) \vdash_1 (j, p', q')$ oder
 $(j, p', q') \vdash_1 (i, p, q)$.

c) $\sim_m, \sim$ sind wie $\vdash_m$ und $\vdash$ definiert, nur daß an-
 stelle von $\vdash_1$ und $\vdash_m$ die Zeichen $\sim_1$ und $\sim_m$
 verwendet werden.

d) Sei $p^+ \in \mathbb{N}$ fest.

$\dot{+} 1 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, \dots, p^+\}$, $p \mapsto \min \{p^+, p+1\}$.

e) $\vdash_n, \vdash, \hat{\sim}_n, \hat{\sim}$ entstehen aus $\vdash_n, \vdash, \sim_n, \sim$, in-
 dem man $+1$ durch $\dot{+}1$ ersetzt.

1.7 Lemma

Sei M ein 2-RM, $\hat{r} \in \{r, r-1\}$ sei ein Stopzustand
 von M , $i \in \{1, \dots, r\}$, $p, q, k \in \mathbb{N}_0$.

(1) Es sei

$$(i, p, q) \hat{\sim}_k (\hat{r}, 0, 0).$$

Dann gibt es ein $k' \in \{0, \dots, k\}$ mit

$$(i, p, q) \vdash_{k'} (\hat{r}, 0, 0).$$

(2) $(r-1, 0, 0) \not\sim (r, 0, 0)$.

(3) $\hat{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf
 $\{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, p^+\}^2$.

Beweis:

(1) wird durch Induktion nach k , wie etwa in [Hs 2]
 bewiesen; zu beachten ist, daß die Verwendung von
 $\hat{\sim}$ anstelle von $\sim$ nichts an der Determiniertheit
 von M und damit nichts am Beweis ändert.

- (2) folgt aus (1), weil beide I_{r-1} und I_r Stopinstruktionen sind.

1.8 Satz über Registernmaschinen:

Sei $\tau : \text{PLIF} \rightarrow \mathbb{N}$ eine passende Gödelisierung von PLIF [Sh].

Es gibt eine 2RM M , so daß für alle PLIF-Formeln F gilt:

M , angesetzt auf $(1, \tau F, 0)$, stoppt genau dann auf $(r, 0, 0)$, wenn F unerfüllbar ist, stoppt genau dann auf $(r-1, 0, 0)$, wenn F endlich erfüllbar ist und durchläuft sonst eine nichtperiodische Konfigurationsfolge.

1.9 Folgerung:

Sei K eine Formelklasse der PLIF.

K ist konservativer Reduktionstyp, wenn K folgende Eigenschaften besitzt:

Zu jeder 2-RM M mit Eingabe $(1, p, 0)$ ($p \in \mathbb{N}_0$) gibt es eine effektiv bestimmbare Formel

$F_{M,p} \in K$, so daß gilt:

- I) Wenn M , angesetzt auf $(1, p, 0)$, auf $(r-1, 0, 0)$ anhält, dann ist $F_{M,p}$ in einem endlichen Bereich erfüllbar.
- II) Wenn $F_{M,p}$ erfüllbar ist, dann gibt es eine (ev. endliche) Folge $(i_n, p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit
 - a) $(1, p, 0) \vdash_{n-1} (i_n, p_n, q_n)$;
 - b) $(i_n, p_n, q_n) \neq (r, 0, 0)$.

Dabei ist $L = \mathbb{N}$ oder gleich einen Anfangssegment $(1, \dots, k)$ von $\mathbb{N}$ und $(i_k, p_k, q_k) = (r-1, 0, 0)$.

Zum Beweis genügt es (wegen 1.5.4) nachzuweisen, daß K semikonservativ ist. Bedingung b) folgt aus II) und Bedingung c) aus I).

§ 2-5 KONSERVATIVE REDUKTIONSKLASSEN IN HERBRANDFORMELN

§ 2 Beschränkung auf wenige Funktionsvariablen

2.1 Aussagenlogische Struktur

2.1.1 Definition

Zwei pränexe Formeln F und G haben die gleiche aussagenlogische Struktur, wenn gilt:

Seien $\tilde{F}$ und $\tilde{G}$ die Matrizen von F und G . F' (bzw. G') entstehe aus $\tilde{F}$ (bzw. $\tilde{G}$), indem man jede Primformel in $\tilde{F}$ (bzw. $\tilde{G}$) durch T ersetzt.

Dann sind die Zeichenreihen von F' und G' identisch.

2.1.2 Beispiel

$\forall x \forall y (p(f(x), x) \wedge \neg \neg q(y))$ und

$\exists z (r(z, z, z) \wedge \neg \neg p(a, g(z)))$

haben die gleiche aussagenlogische Struktur,

$\exists x q(x)$ und $\exists x \neg \neg q(x)$ dagegen nicht.

2.1.3 Folgerung

Für Formeln F und endliche Termfolgen $\vec{s}, \vec{t}$ gilt:

$F(\frac{\vec{s}}{\vec{t}})$ hat die gleiche aussagenlogische Struktur wie F und insbesondere die gleiche Anzahl von Primformeln.

2.2 Satz über die Beschränkung auf wenige Funktionsvariablen

Zu jeder geschlossenen PLIF-Formel F aus den folgenden Formelklassen läßt sich effektiv eine Formel G mit folgenden Eigenschaften angeben:

$$a.1) \quad F \in \forall^n(\phi; (g_i^j)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq l(j)}}), \quad 3 \leq m \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G \in \forall^n(\phi; (\hat{g}_i^j)_{\substack{1 \leq j \leq m-1 \\ 1 \leq i \leq l(j)}}, f_{1, \dots, f_{l(m)}^{m-1}}, c^2, d^1);$$

$$a.2) \quad F \in \forall^n(\phi; f_1^1, \dots, f_r^1, f_{r+1}^2, \dots, f_s^2), \quad r \leq s \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G \in \forall^n(\phi; h^2);$$

$$a.3) \quad F \in \forall^1(\phi; f_1^1, \dots, f_r^1), \quad r \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G \in \forall^n(\phi; g^1, h^1);$$

b) G besitzt die gleiche aussagenlogische Gestalt wie F;

c) F ist genau dann (endlich) erfüllbar, wenn G es ist.

Beweis

Zu a.1), b), c):

Ist F die geschlossene Formel $\forall \vec{x} B(\vec{x})$

aus $\forall^n(\phi; (g_i^j)_{i=1, \dots, l(j)}^{j=1, \dots, m})$ und sind $\hat{g}_i^j$

$(j=1, \dots, m-1; i=1, \dots, l(j))$ j-stellige, $f_1, \dots, f_{l(m)}$

(m-1)-stellige Funktionsvariablen, ist c eine 2-stellige und d eine 1-stellige Funktionsvariable, die alle nicht unter den g_i^j auftreten, so sei H folgende Formel:

$$\begin{aligned} & \forall \vec{x} B(\vec{d}\vec{x}) \wedge \forall x_1 \dots \forall x_m \left(\bigwedge_{i=1, \dots, l(m)} g_i^m(x_1, \dots, x_m) = \right. \\ & \quad = df_1(x_1, \dots, x_{m-2}, c(x_{m-1}, x_m)) \wedge \\ & \quad \left. \bigwedge_{j=1, \dots, m-1} \bigwedge_{i=1, \dots, l(j)} g_i^j(x_1, \dots, x_j) = \right. \\ & \quad \left. = d \hat{g}_1^j(x_1, \dots, x_j) \right). \end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft, ist F genau dann (endlich) erfüllbar, wenn H es ist. H ist erfüllbarkeitsgleich mit einer Formel

$$G \in \forall^n(\phi; (\hat{g}_i^j)_{i=1, \dots, l(j)}^{j=1, \dots, m-1}, f_1^{m-1}, \dots, f_{l(m)}^{m-1} c^2, d^1),$$

wenn man in B die Funktionsvariablen g_i^j gemäß den Definitionen in H durch

$$\hat{g}_1^1, \dots, \hat{g}_{l(m-1)}^{m-1}, f_1^{m-1}, \dots, f_{l(m)}^{m-1}, c, d \text{ ersetzt.}$$

Die Formel G besitzt die gleiche aussagenlogische Struktur wie F, da G durch Ersetzungen von Termen aus F entsteht.

Analog werden auch a.2) und a.3) bewiesen (vgl. auch [Gu3]). Ich gebe nur noch die jeweilige Formel H an:

a.2):

Ist F die Formel $\forall \vec{x} B(\vec{x})$ aus

$$\forall^n(\phi; f_1^1, \dots, f_r^1, f_{r+1}^2, \dots, f_s^2), \text{ dann sei H die}$$

Formel:

$$\forall \vec{x} B(\vec{d}\vec{x}) \wedge \forall x \forall y$$

$$\left(\bigwedge_{i=1, \dots, r} f_i^{x=dh(h(d^{i+1}x, d'x), d'x)} \wedge \right.$$

$$\left. \bigwedge_{i=r+1, \dots, s} f_i^{x,y=dh(h(d^{i+1}x, d'x), d'y)} \wedge \right.$$

$$\wedge d'x = h(x, x) \wedge dx = h(d^{s+2}x, d'x)).$$

a.3):

Ist F die Formel $\forall \vec{x} B(\vec{x}) \in \mathcal{V}^n(\phi; f_1^1, \dots, f_r^1)$,

dann sei H die Formel

$$\forall x \left(\bigwedge_{i=1, \dots, r} f_i^1 x = hg^i x \wedge \forall \vec{x} B(\vec{h}\vec{x}) \right).$$

2.3 Folgerung

Sei $k \in \mathbb{N} \cup (\infty)$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ist die geschlossene PLIF-Formel F aus $\mathcal{V}^n(\phi; \Psi) \cap \text{Her}(k)$ bzw. aus $\mathcal{V}^n(\phi; f_1^1, \dots, f_r^1) \cap \text{Her}(k)$, dann gibt es eine effektiv bestimmbare Formel G aus

$$\mathcal{V}^n(\phi; g^2) \cap \text{Her}(k) \text{ bzw. aus } \mathcal{V}^n(\phi; g^1, h^1) \cap \text{Her}(k),$$

so daß gilt:

F ist genau dann (endlich) erfüllbar, wenn G es ist.

§ 3 $\forall^3(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(3)$ ist ein konservativer Reduktionstyp
 =====

3.1 Heuristik

Zu jeder 2-RM $M = (I_1, \dots, I_r), r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, mit Eingabe $(1, \tilde{p}, 0)$ definieren wir eine Formel $F_{M, \tilde{p}} \in \forall^3(\emptyset; e, \dots, h) \wedge \text{Her}(3)$, die die Bedingungen I und II aus 1.9 erfüllt.

Die Funktionsvariablen lassen sich dann mit 2.3 auf eine 2-stellige Funktionsvariable reduzieren.

Die Idee ist folgende:

Wir kodieren die Instruktionen $I_1, \dots, I_{r-2}$ (mit Ausnahme der Stopinstruktionen I_{r-1}, I_r) und gewisse Nebenbedingungen so, daß wir Ausdrücke der Form

$$(A_i, C_i D_i) \quad (i=1, \dots, 2^k; k \in \mathbb{N})$$

erhalten, wobei die A_i, C_i, D_i 1-stellige Funktionsvariablen sind und k eine genügend große Zahl ist. Die Konfigurationen $\underline{k}_j$ der 2-RM charakterisieren wir ebenso durch Folgen 1-stelliger Funktionsvariablen:

$$(k_1, \dots, k_{1(j)}) \quad (1(j), j \in \mathbb{N}).$$

Um $\underline{k}_j$ als Term mit Funktionsvariablen zu schreiben, benutzen wir eine 2-stellige Funktionsvariable h und (für später) eine 1-stellige Funktionsvariable v :

$$(0) \quad \underline{k}_j = v^k h(k_1 x, h(k_2 x, \dots, h(k_{1(j)} x, y) \dots)).$$

Zum Übergang zur Nachfolgekonfiguration wollen wir eine Gleichung haben, die die ganze Maschine beschreibt:

$$\begin{aligned} [1] \quad \forall x \forall y \quad & (h(A_1 x, h(A_2 x, \dots, h(A_{2^k} x, y) \dots)) = \\ & = h(C_1 x, \dots, h(C_{2^k}, h(D_1 x, \dots, h(D_{2^k} x, y) \dots))). \end{aligned}$$

Sei nun z.B. $\underline{k}_2 = A_i \quad (i \in \{1, \dots, 2^k\})$, d.h.

$$(3) \quad \underline{k}_j = v^k h(k_1 x, h(A_1 x, h(k_3 x, \dots, h(k_{1(j)} x, y) \dots)) .$$

Die Nachfolgekonfiguration $\underline{k}_{j+1}$ hat dann die Gestalt:

$$\underline{k}_{j+1} = v^k h(k_1 x, h(C_1 x, h(D_1 x, h(k_3 x, \dots, h(k_{1(j)} x, y) \dots))).$$

Um Gleichung [1] auf $\underline{k}_j$ anwenden zu können, bauschen wir mit Hilfe von v $\underline{k}_j$ auf:

$$[2] \quad \forall x \forall y \forall z (v h(x, y) = h(x, h(z, v y))).$$

v fügt hinter jedem x noch ein beliebiges z an,
 v^k noch 2^k-1 beliebige z :

$$(4) \quad \underline{k}_j = h(k_1 x, h(z_1, \dots, h(z_{2^k-1}, h(A_1 x, h(z'_1, \dots, \dots, h(z'_{2^k-1}, v^k h(k_3 x, \dots, h(k_{1(j)} x, y) \dots))).$$

Wir wählen nun resp.

$z_{2^k-i+1}, \dots, z_{2^k-1}$ als $A_1 x, \dots, A_{i-1} x$ und

$z'_1, \dots, z'_{2^k-i}$ als $A_{i+1} x, \dots, A_{2^k} x$

wenden [1] auf (4) an:

$$(5) \quad \underline{k}_j = h(k_1 x, h(z_1, \dots, h(z_{2^k-i}, h(A_1 x, \dots, h(A_{2^k} x, \dots, h(z'_{2^k-i+1}, \dots, h(z'_{2^k}, v^k h(k_3 x, \dots, h(k_{1(j)} x, y) \dots))) \\ = h(k_1 x, h(z_1, \dots, h(z_{2^k-i}, h(C_1 x, \dots, h(D_{2^k} x, \dots, h(z'_{2^k-i+1}, \dots, h(z'_{2^k}, v^k h(k_3 x, \dots, h(k_{1(j)} x, y) \dots))).$$

Gleichung [2], von rechts nach links angewandt, bewirkt, daß v nur jeden zweiten Term bzw. daß v^k nur jeden 2^k -ten Term stehen läßt. $D_1 x$, $C_1 x$, $k_1 x$ haben von v^k genau die Abstände 2^k , $2 \cdot 2^k$, $3 \cdot 2^k$. Vielmahlige Anwendung von [2] auf die rechte Seite von (5) ergibt die Nachfolgekonfiguration $\underline{k}_{j+1}$:

$$(5) \quad \underline{k}_j = v^k h(k_1 x, h(C_1 x, h(D_1 x, h(k_3 x, \dots, h(k_{1(j)} x, y) \dots))) = \underline{k}_{j+1}.$$

Mit Hilfe einer Ungleichung, die besagt:

$$"(1, \tilde{p}, 0) \neq (r, 0, 0)"$$

erreichen wir, daß M , angesetzt auf $(1, \tilde{p}, 0)$ nie in die Konfiguration $(r, 0, 0)$ übergeht.

3.2 Voraussetzung

Im folgenden betrachten wir 2-RM

$M = (I_1, \dots, I_r)$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, angesetzt auf $(1, \tilde{p}, 0)$.

$r, r-1$ seien die Stopzustände von M .

$e, f, g, l, o', o'', G_1, \dots, G_r, H_1, \dots, H_r, s, s', t, t', v$ seien 1-stellige Funktionsvariablen, h eine 2-stellige Funktionsvariable.

3.3 Kodierung von M

(1) Wir beschreiben

die Zustände $1, \dots, r$ von M durch $G_1, \dots, G_r$,

die Addition im 1. Register durch f ,

die Addition im 2. Register durch g ,

die Null im 1. Register durch o' ,

die Null im 2. Register durch o'' ,

die Konfiguration $k_j = (i, p, q)$ durch

$$v^k h(\underbrace{\text{lex}, h(lG_i x, h(\underbrace{lfx, \dots, h(lfx)}_{p\text{-mal}}, h(lo'x, \\ , h(\underbrace{l gx, \dots, h(l gx)}_{q\text{-mal}}, h(lo''x, y) \dots))}_{q\text{-mal}}),$$

gewisse Hilfsfunktionen durch $s, s', t, t', H_1, \dots, H_r$.

(2) Die Paare (A_i, C_i, D_i) haben die Form:

Seien $i \in \{1, \dots, r-2\}$, $j, k' \in \{1, \dots, r\}$:

a) Nebenbedingungen (besagen, daß die Rechenoperationen in 1. und im 2. Register unabhängig voneinander ausgeführt werden können):

- a.1) $\underline{o''o'} = o'o''$: $(t', o''o'); (t', o'o'')$;
 a.2) $\underline{fo''} = o''f$: (t, fo'') ; $(t, o''f)$;
 a.3) $\underline{go'} = o'g$: (s', go') ; $(s', o'g)$;
 a.4) $\underline{fg} = \sigma f$: (s, fg) ; $(s, \sigma f)$.
 bi) Falls $\underline{I_1 = a_1[j]}$: $(G_1, G_j f)$.
 ci) Falls $\underline{I_1 = a_2[j]}$: $(G_1, G_j g)$.
 di) Falls $\underline{I_1 = s_1[j, k']}$: $(H_1, G_1 o')$; $(H_1, G_j o')$;
 $(G_k, G_1 f)$.
 ei) Falls $\underline{I_1 = s_2[j, k']}$: $(H_1, G_1 o'')$; $(H_1, G_j o'')$;
 $(G_k, G_1 g)$.

Die durch a)-ei) definierten Paare (A_1, C_1, D_1) ordnen wir in

$$(A_2, C_2, D_2), \dots, (A_m, C_m, D_m).$$

Sei k so gewählt, daß $m' \leq 2^k$ und $k \geq 5$ gilt.

$$(A_j, C_j, D_j) := \begin{cases} (A_m, C_m, D_m) & \text{falls } m' \leq j \leq 2^k, \\ (A_2, C_2, D_2) & \text{falls } j = 1, \\ (A_j, C_j, D_j) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erhalten also eine Folge von 2^k Paaren.

3.4 Die Formel $F_{M, \tilde{p}}$

Mit den Definitionen aus 3.2 und 3.3 sei $F_{M, \tilde{p}}$ die Formel $\forall x \forall y \forall z G_{M, \tilde{p}}$.

$G_{M, \tilde{p}}$ sei die Konjunktion aus folgenden drei Quasiformeln:

$$[1] \quad h(1A_1 x, h(1A_2 x, \dots, h(1A_{2^k} x, y) \dots)) = \\ = h(1C_1 x, \dots, h(1C_{2^k} x, h(1D_1 x, \dots, h(1D_{2^k} x, y) \dots));$$

$$[2] \quad \forall h(1x, y) = h(1x, h(1z, vy));$$

$$[\neq] \vee^k h(\text{lex}, h(\text{lg}_1 x, \underbrace{h(\text{lfx}, \dots, h(\text{lfx}, h(\text{lo}'x, h(\text{lo}''x, \text{lex}), \dots)}_{\tilde{p}\text{-mal}}))) \\ \neq \vee^k h(\text{lex}, h(\text{lg}_r x, h(\text{lo}'x, h(\text{lo}''x, \text{lex}))))).$$

3.5 Lemma II

Sei $F_{M, \tilde{p}}$ erfüllbar, a ein beliebiges Element aus einem Modell von $F_{M, \tilde{p}}$.

Dann gibt es eine Menge L und eine (ev. endliche) Folge $(i(n), p(n), q(n))_{n \in L}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) (1, \tilde{p}, 0) \vdash_{n-1} (i(n), p(n), q(n)) \text{ für alle } n \in L;$$

$$(2) (i(n), p(n), q(n)) \neq (r, 0, 0) \text{ für alle } n \in L;$$

$$(3) E := \vee^k h(\text{lea}, h(\text{lg}_1 a, \underbrace{h(\text{lfa}, \dots, h(\text{lfa}, \\ \text{h(lo}'a, h(\text{lo}''a, \text{lea}), \dots)}_{\tilde{p}\text{-mal}})) = d(n), \\ \text{wobei} \\ d(n) := \vee^k h(\text{lea}, h(\text{lg}_{i(n)} a, \underbrace{h(\text{lfa}, \dots, h(\text{lfa}, \\ \text{h(lo}'a, \underbrace{h(\text{lga}, \dots, h(\text{lga}, h(\text{lo}''a, \text{lea}), \dots)}_{q(n)\text{-mal}}))}_{p(n)\text{-mal}})))).$$

Dabei ist $L = \mathbb{N}$ oder ein Anfangsstück $\{1, \dots, k'\}$ von $\mathbb{N}$ mit $(i(k'), p(k'), q(k')) = (r-1, 0, 0)$.

Beweis durch Induktion nach n :

$n = 1$:

$$(i(1), p(1), q(1)) := (1, \tilde{p}, 0).$$

Damit ist (1) und (3) erfüllt.

(2) folgt aus (3) und $[\neq]$.

$n \rightarrow n+1$

1. Fall: $(i(n), p(n), q(n)) = (r-1, 0, 0)$.

Dann gilt die Behauptung für $L = (1, \dots, n)$.

2. Fall: sonst

Wegen der Induktionsvoraussetzung (2)

$$(i(n), p(n), q(n)) \neq (r, 0, 0)$$

und der Voraussetzung des 2. Falles gibt es (j, p, q) mit

$$(4) (i(n), p(n), q(n)) \vdash_1 (j, p, q).$$

Sei $(i(n+1), p(n+1), q(n+1)) := (j, p, q)$.

Wegen (4) und der Induktionsvoraussetzung (1) gilt

Punkt (1) der Behauptung:

$$(1) (1, \tilde{p}, 0) \vdash_n (i(n+1), p(n+1), q(n+1)).$$

Je nachdem, ob der Übergang in (4) eine Addition oder Subtraktion im 1. oder 2. Register war, sind Fallunterscheidungen zu machen:

$$\text{Fall a): } \underline{I_{i(n)}} = \underline{a_1[j]}$$

Es ist dann:

$$p(n+1) = p = p(n)+1, \quad q(n+1) = q = q(n), \quad i(n+1) = j;$$

$$(A_m, C_m D_m) \equiv (G_{i(n)}, G_{i(n+1)}^f) \text{ für ein } m \in \{1, \dots, 2^k\}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung (3) ist

$$E = d(n) = v^k h(\text{lea}, h(lG_{i(n)}^a, \hat{B}))$$

$$\text{mit } \hat{B} := \underbrace{h(lfa, \dots, h(lfa))}_{p(n)\text{-mal}}, \underbrace{h(lo^a, h(lga, \dots, h(lga, h(lo^a, \text{lea}) \dots))}_{q(n)\text{-mal}}.$$

Zweifache Anwendung von [2] ergibt:

$$E = v^{k-1} h(\text{lea}, h(lz_1, h(lG_{i(n)}^a, h(lz_2, v\hat{B})))) .$$

Denselben Schluß führen wir noch $(k-1)$ -mal durch:

$$E = h(\text{lea}, h(lz_1^1, \dots, h(lz_{2^{k-1}}^1, h(lG_{i(n)}^a, h(lz_1^2, \dots, \dots, h(lz_{2^{k-1}}^2, v^k \hat{B}) \dots))).$$

Nun seien

$$z_{2^{k-m+1}}^1, \dots, z_{2^{k-1}}^1 \quad \text{als } A_1 a, \dots, A_{m-1} a,$$

$$z_1^2, \dots, z_{2^{k-m}}^2 \quad \text{als } A_{m+1} a, \dots, A_{2^k} a$$

gewählt; die anderen z_j^i seien beliebig.

Es gilt wegen $G_{i(n)} a \equiv A_m$:

$$E = h(lea, h(lz_1^1, \dots, h(lz_{2k-m}^1, h(lA_1a, \dots, h(lA_{2k}a, \\ , h(lz_{2k-m+1}^2, \dots, h(lz_{2k-1}^2, v^{\hat{k}B})) \dots).$$

Aus [1] von links nach rechts angewendet folgt:

$$E = h(lea, h(lz_1^1, \dots, h(lz_{2k-m}^1, h(lC_1a, \dots, h(lC_{2k}a, \\ , h(lD_1a, \dots, h(lD_{2k}a, h(lz_{2k-m+1}^2, \dots, h(lz_{2k-1}^2, v^{\hat{k}B})) \dots).$$

Gleichung [2] von rechts nach links hierauf angewendet, läßt genau jeden 2^k -ten Term links von $v^{\hat{k}}$ stehen:

$$\begin{aligned} E &= v^{\hat{k}} h(lea, h(lC_m a, h(lD_m a, \hat{B}))) = \\ &= v^{\hat{k}} h(lea, h(lG_{i(n+1)} a, h(lfa, \hat{B}))) = \\ &= v^{\hat{k}} h(lea, h(lG_{i(n+1)} a, \underbrace{h(lfa, \dots, h(lfa))}_{p(n)+1-\text{mal}}, h(lo'a, \\ &\quad \underbrace{h(lga, \dots, h(lga, h(lo''a, lea) \dots)}_{q(n)-\text{mal}})) = \\ &= d(n+1), \end{aligned}$$

wegen $q(n+1) = q(n)$ und $p(n+1) = p(n)+1$.

$(i(n+1), p(n+1), q(n+1)) \neq (r, 0, 0)$ folgt aus [±], denn:
 $v^{\hat{k}} h(lea, h(lG_r a, h(lo'a, h(lo''a, lea)))) \neq E = d(n+1)$.

Die folgenden Fälle gehen analog Fall a); nur muß die in Fall a) verwendete Schlußmethode:

aus einem Term $H(A_m)$ einen Term $H(C_m, D_m)$ zu erhalten, mehrfach und manchmal auch in der anderen Richtung angewendet werden.

Wir bezeichnen das mit : $A_m \rightsquigarrow C_m D_m$.

Fall b): $I_{i(n)} = a_2 [j]$

Folgende Schlüsse werden durchgeführt:

$$G_{i(n)} \rightsquigarrow G_{jg}, \underbrace{gf \rightsquigarrow s \rightsquigarrow fg}_{p(n)-\text{mal}}, go' \rightsquigarrow s' \rightsquigarrow o'g.$$

Fall c): $I_{i(n)} = s_1 [j, k']$ und $p(n) = 0$

$$G_{i(n)} o' \rightsquigarrow H_{i(n)} \rightsquigarrow G_{jo'}.$$

Fall d): $I_{i(n)} = s_1[j, k']$ und $p(n) > 0$.

$$G_{i(n)}^f \rightsquigarrow G_{k'}.$$

Fall e): $I_{i(n)} = s_2[j, k']$ und $q(n) = 0$.

$$o'o'' \rightsquigarrow t' \rightsquigarrow o''o', \quad \underbrace{fo'' \rightsquigarrow t \rightsquigarrow o''f}_{p(n)\text{-mal}}$$

$$G_{i(n)}o'' \rightsquigarrow H_{i(n)} \rightsquigarrow G_j o'', \quad \underbrace{o''f \rightsquigarrow t \rightsquigarrow fo''}_{p(n)\text{-mal}}, \quad o''o' \rightsquigarrow t' \rightsquigarrow o'o''.$$

Fall f): $I_{i(n)} = s_2[j, k']$ und $q(n) > 0$.

$$o'g \rightsquigarrow s' \rightsquigarrow go', \quad \underbrace{fg \rightsquigarrow s \rightsquigarrow gf}_{p(n)\text{-mal}}, \quad G_{i(n)}g \rightsquigarrow G_{k'}.$$

3.6 Voraussetzung

Im folgenden (3.7 - 3.10) hält die 2-RM

$M = (I_1, \dots, I_r)$ mit Eingabe $(1, \tilde{p}, 0)$ bei $(r-1, 0, 0)$ an.

3.7 Ein Modell für $F_{M, \tilde{p}}$

$$(1) \quad p^+ := 1 + \max \{ p \mid \exists q \exists i [(1, \tilde{p}, 0) \vdash (i, p, q) \text{ o. } (1, \tilde{p}, 0) \vdash (i, q, p)] \}.$$

Diese natürliche Zahl existiert, da M nach endlich vielen Schritten in $(r-1, 0, 0)$ anhält.

Mit dem so gewählten p^+ gilt auch:

$$(1, \tilde{p}, 0) \vdash (r-1, 0, 0) \quad (\vdash \text{ bzgl. } p^+).$$

Also ist nach Lemma 1.7.(2):

$$(1, \tilde{p}, 0) \not\vdash (r, 0, 0).$$

Sei Q die Menge der Äquivalenzklassen in

$$\{0, \dots, r+1\} \times \{0, \dots, p^+\}^2 \text{ bzgl. } \sim:$$

$$Q := (\{0, \dots, r+1\} \times \{0, \dots, p^+\}^2) / \sim.$$

(2) Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei:

$$\bar{\neg}(i) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, \dots, 2^i - 1\}, \quad \bar{n}(i) := n \bmod 2^i.$$

3) Der Individuenbereich des Modells $\mathcal{M} = (M'; G_1, \dots, e)$:

$$M' := \{0, \dots, k\} \times \{0, \dots, 2^k\} \times Q.$$

$$0' := (0, 0, r + 1, 0, 0).$$

4) Sei nun $(i, n, j, p, q) \in M$.

Zur Vereinfachung habe ich die Klammer für Elemente aus Q weggelassen.

Für $l = 1, \dots, r$ sei:

$$G_l(i, n, j, p, q) := (0, 0, l, 0, 0);$$

$$H_l(i, n, j, p, q) := \begin{cases} (0, 0, l, 2, 0) & \text{falls } I_l = s_1[\tilde{j}, \tilde{k}] \text{ für} \\ & \text{gewisse } \tilde{j}, \tilde{k} \in \{1, \dots, r\}, \\ (0, 0, l, 0, 2) & \text{falls } I_l = s_2[\tilde{j}, \tilde{k}] \text{ für} \\ & \text{gewisse } \tilde{j}, \tilde{k} \in \{1, \dots, r\}, \\ 0'. & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$(f) \quad f(i, n, j, p, q) := (0, 0, 0, 1, 0);$$

$$(g) \quad g(i, n, j, p, q) := (0, 0, 0, 0, 1);$$

$$(o') \quad o'(i, n, j, p, q) := (0, 0, 0, 2, 0);$$

$$(o'') \quad o''(i, n, j, p, q) := (0, 0, 0, 0, 2);$$

$$(e) \quad e(i, n, j, p, q) := (0, 0, 0, 0, 0);$$

$$(t') \quad t'(i, n, j, p, q) := (0, 0, 0, 2, 2);$$

$$(t) \quad t(i, n, j, p, q) := (0, 0, 0, 1, 2);$$

$$(s') \quad s'(i, n, j, p, q) := (0, 0, 0, 2, 1);$$

$$(s) \quad s(i, n, j, p, q) := (0, 0, 0, 1, 1);$$

$$(l) \quad l(i, n, j, p, q) := (0, 0, j, p, q);$$

$$(v) \quad v(i, n, j, p, q) := \begin{cases} (i+1, \overline{2n}(i+1), j, p, q) & \text{falls} \\ & i < k, j \leq r; \\ 0' & \text{sonst.} \end{cases}$$

5) Sei $x := (i, n, j, p, q)$, $y := (i', n', j', p', q') \in M$.

$h(x, y) :=$

(h 1) $(i', \overline{O}(i'), j, p', q')$ falls $x = G_j a (a \in M)$ u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = 0$;

(h 2) $(i', \overline{O}(i'), j, 0, q')$ falls $x = H_j a (a \in M)$ u.
 $I_j = s_1[\tilde{j}, \tilde{k}]$ für gewisse
 $\tilde{j}, \tilde{k} \in \{1, \dots, r\}$ u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = p' = 0$;

(h 3) $(i', \overline{O}(i'), j, p', 0)$ falls $x = H_j(a)$ ($a \in M$) u.
 $I_j = s_2[\tilde{j}, \tilde{k}]$ für gewisse
 $\tilde{j}, \tilde{k} \in \{1, \dots, r\}$ u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = q' = 0$;

(h 4) $(i', \overline{O}(i'), 0, p'+1, q')$ falls $x = fa$ ($a \in M$) u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = 0$;

(h 5) $(i', \overline{O}(i'), 0, p', q'+1)$ falls $x = ga$ ($a \in M$) u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = 0$;

(h 6) $(i', \overline{O}(i'), 0, 0, q')$ falls $x = o'a$ ($a \in M$) u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = p' = 0$;

(h 7) $(i', \overline{O}(i'), 0, p', 0)$ falls $x = o''a$ ($a \in M$) u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = q' = 0$;

(h 8) $(i', \overline{O}(i'), j', p', q')$ falls $x = ea$ ($a \in M$) u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$;

(h 9) $(i', \overline{O}(i'), 0, 0, 0)$ falls $x = t'a$ ($a \in M$) u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = p' = q' = 0$;

(h10) $(i', \overline{O}(i'), 0, 0, q'+1)$ falls $x = ta$ ($a \in M$) u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = p' = 0$;

(h11) $(i', \overline{O}(i'), 0, p'+1, 0)$ falls $x = s'a$ ($a \in M$) u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = q' = 0$;

(h12) $(i', \overline{O}(i'), 0, p'+1, q'+1)$ falls $x = sa$ ($a \in M$) u.
 $\overline{n'+1}(i') = \overline{O}(i')$ u. $j' = 0$;

(h13) $(i', \overline{n'+1}(i'), j', p', q')$ falls $\overline{n'+1}(i') \neq \overline{O}(i')$ u. $j' \leq r$;

(h14) 0' sonst.

3.8 Beweis von [1]

Seien $a := (i', n', j', p', q)$ und $b := (i, n, j, p, q)$ beliebig aus M .

Zu zeigen ist: $A = B$ mit

$$A := h(lA_1 a, h(lA_2 a, \dots, h(lA_{2k} a, b) \dots));$$

$$B := h(lC_1 a, \dots, h(lC_{2k} a, h(lD_1 a, \dots, h(D_{2k} a, b) \dots))).$$

Wir machen eine Fallunterscheidung bzgl. b :

1. Fall: $j > 0$

Es gibt ein $m \in \{0, \dots, 2^i - 1\}$ mit

$$n + m + 1(i) = \overline{O}(i).$$

Dann ist $A = h(lA_1 a, \dots, h(lA_{2k-m} a, (i, \overline{n+m}(i), j, p, q))) = O'$ nach Definition von h .

Ebenso ist $B = h(lC_1 a, \dots, h(lD_{2k-m} a, (i, \overline{n+m}(i), j, p, q))) = O'$.

2. Fall $j=0$ und $i < k$

Dann gibt es $n(1) < n(2) < 2^k$ mit

$$n(1) + 2^i = n(2) \text{ u. } \overline{2^k - n(2) + n(1)}(i) = \overline{O}(i),$$

so daß gilt:

$$A_{n(2)} \in \{G_1, \dots, G_r, H_1, \dots, H_r\} \text{ und } C_{n(2)} \in \{G_1, \dots, G_r\};$$

d.h. $lA_{n(2)}$ und $lC_{n(2)}$ haben die Form $(O, O, l', a'b')$ mit $l' \neq O$.

Für A gilt: $(\overset{\circ}{j}, \overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}, \hat{p}, \hat{q})$ passend gewählt

$$A = h(lA_1 a, \dots, h(lA_{2k} a, b) =$$

$$= \begin{cases} O' & \text{falls } h(lA_{n(2)+1} a, \dots, h(lA_{2k} a, b) \dots) = O', \\ h(lA_1 a, \dots, h(lA_{n(2)-1} a, h((O, O, l'; a'b'), (i, 2^{i-1}, \overset{\circ}{j}, \overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}))) \dots), & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} O' & \text{falls } h(lA_{n(2)} a, \dots, b) = O', \\ h(lA_1 a, \dots, h(lA_{n(2)-1} a, (i, \overline{O}(i), l', \hat{p}, \hat{q}))) \dots), & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} O' & \text{falls } h(lA_{n(2)} a, \dots, b) = O', \\ h(lA_1 a, \dots, h(lA_{n(1)} a, (i, 2^{i-1}, l', \hat{p}, \hat{q}))) \dots) = O', & \text{sonst;} \end{cases}$$

wegen Forderung $l' = O$ in Definition 3.7.5).

Ebenso gilt : $B = 0'$:

Falls nämlich $h(1D_1a, \dots, h(1D_2ka, (i, n, j, p, q))) \neq 0'$

gilt, kann man wie eben argumentieren; sonst ist B sowieso gleich $0'$.

3. Fall: $i=k, j=0$

Also ist $b = (k, n, 0, p, q)$.

Es gibt genau ein $m \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ mit

$$\bar{n}(k) + m + 1 = 2^k = \bar{O}(k).$$

$$A = h(1A_1a, \dots, h(1A_{2^k}a, (k, n, 0, p, q))) \dots =$$

$$= h(1A_1a, \dots, h(1A_{2^{k-m}}a, (k, 2^{k-1}, 0, p, q))) \dots;$$

$$B = h(1C_1a, \dots, h(1C_{2^k}a, h(1D_1a, \dots, h(1D_{2^k}a, (k, n, 0, p, q))) \dots) =$$

$$= h(1C_1a, \dots, h(1C_{2^k}a, h(1D_1a, \dots, h(1D_{2^{k-m}}a, (k, 2^{k-1}, 0, p, q))) \dots).$$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach der Gestalt von

$$(A_w, C_w D_w), w := 2^{k-m}:$$

3.1 Fall: $(A_w, C_w D_w) \equiv (t', o'' o')$

Es ist $1A_w a = t'a, 1C_w a = o''a, 1D_w a = o'a$.

Nach 3.7.5) (h9), (h13) gilt für $p=q=0$:

$$A = h(1A_1a, \dots, h(1A_{w-1}a, (k, 0, 0, 0, 0))) \dots = (k, \bar{n}(k), 0, 0, 0)$$

Nach 3.7.5) (h6) -(h7), (h13) gilt für $p=q=0$:

$$B = h(1C_1a, \dots, h(1C_{2^k}a, h(1D_1a, \dots, h(1D_{w-1}a, (k, 0, 0, 0, q))) \dots) =$$

$$= h(1C_1a, \dots, h(1C_{2^k}a, (k, \bar{n}(k), 0, 0, q))) \dots =$$

$$= h(1C_1a, \dots, h(1C_{w-1}a, h(1o''a, (k, 2^{k-1}, 0, 0, q))) \dots) =$$

$$= h(1C_1a, \dots, h(1C_{w-1}a, (k, 0, 0, 0, 0))) \dots =$$

$$= (k, \bar{n}(k), 0, 0, 0).$$

Für $p + q \neq 0$ gilt $A = B = 0'$.

3.2 Fall $(A_w, C_w D_w) \equiv (G_{\tilde{i}}, G_{\tilde{j}} f)$

Es ist $lA_w a = G_{\tilde{i}} a$, $lC_w a = G_{\tilde{j}} a$, $lD_w a = fa$.

Nach 3.7.5), (h1), (h13) gilt:

$$\begin{aligned} A &= h(lA_1 a, \dots, h(lA_{w-1} a, h(G_{\tilde{i}} a, (k, 2^k - 1, 0, p, q)) \dots)) = \\ &= h(lA_1 a, \dots, h(lA_{w-1} a, (k, 0, \tilde{i}, p, q))) = (k, \bar{n}(k), \tilde{i}, p, q). \end{aligned}$$

Nach 3.7.5), (h4), (h1), (h13) gilt:

$$\begin{aligned} B &= h(lC_1 a, \dots, h(lD_{w-1} a, h(fa, (k, 2^k - 1, 0, p, q)) \dots)) = \\ &= h(lC_1 a, \dots, h(lD_{w-1} a, (k, 0, 0, p+1, q)) \dots) = \\ &= h(lC_1 a, \dots, h(lC_{w-1} a, h(G_{\tilde{j}} a, (k, 2^k - 1, 0, p+1, q)) \dots)) = \\ &= h(lC_1 a, \dots, h(lC_{w-1} a, (k, 0, \tilde{j}, p+1, q)) \dots) = (k, \bar{n}(k), \tilde{j}, p+1, q). \end{aligned}$$

Wegen $I_{\tilde{i}} = a_1 [\tilde{j}]$ gilt:

$$(\tilde{i}, p, q) \sim (\tilde{j}, p+1, q).$$

Also ist $A = B$.

3.3 Fall: sonst

Ist $(A_w, C_w D_w)$ durch 3.3 (2)a) definiert, so verläuft der Beweis analog dem Fall 3.1. Anstelle von (h6), (h7), (h9), (h13) wird je nachdem (h4)-(h7) und (h9)-(h13) verwendet.

Ist $(A_w, C_w D_w)$ durch 3.3.(2)b)-e) definiert, so verläuft der Beweis analog dem Fall 3.2. Anstelle von (h1), (h4), (h13) wird je nachdem (h1)-(h6), (h13) verwendet.

3.9 Beweis von [2]

Seien $la, lb := (0, 0, j, p, q)$, $c = (i, n, j', p', q') \in M$.

Durch Fallunterscheidung nach i zeigt man:

$$vh(la, c) = h(la, h(lb, vc)).$$

1. Fall: $i=k$

Nach 3.7.4) ist $vc = 0' = h(1a, h(1b, vc))$.

Falls $h(1a, c) \neq 0'$ ist, gilt für passende n'', j'', p'', q'' :

$h(1a, c) = (k, n'', j'', p'', q'')$ und damit wegen 3.7.4 (v):

$$vh(1a, c) = 0'.$$

Andernfalls ist $vh(1a, c) = h(1a, c) = 0'$.

2. Fall: $i < k$

Durch Fallunterscheidung nach $(h1)-(h14)$ erhält man jeweils für passende j'', p'', q'' :

$$vh(1a, c) = h(1a, h(1b, vc)) =$$

$$= \begin{cases} (i+1, \overline{2n+2}(i+1), j'', p'', q'') & \text{falls ein } (hi') \text{ mit} \\ 0' & i' \in \{1, \dots, 13\} \text{ anwendbar ist,} \\ & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.10 Beweis von [†]

Sei $a = (i, n, j, p, q) \in M$.

$$\begin{aligned} 1) \quad v^k h(1ea, h(1G_1 a, \underbrace{h(1fa, \dots, h(1fa, h(1o'a, h(1o''a, 1ea) \dots)}_{\tilde{p}\text{-mal}})) &= \\ = (e) v^k h(1ea, h(1G_1 a, \underbrace{h(1fa, \dots, h(1fa, h(1o'a, h(1o''a, (0, 0, 0, 0, 0))}_{\tilde{p}\text{-mal}} \dots))) &= \\ = (h7), (h6), (h4) v^k h(1ea, h(1G_1 a, (0, \overline{0}(0), 0, \tilde{p}, 0))) &= \\ = (h1), (h8) v^k (0, \overline{0}(0), 1, \tilde{p}, 0) = (k, \overline{0}(k), 1, \tilde{p}, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad v^k h(1ea, h(1G_r a, h(1o'a, h(1o''a, 1ea)))) &= \\ = v^k h(1ea, h(1G_r a, h(1o'a, h(1o''a, (0, 0, 0, 0, 0)))) &= \\ (e) &= \\ = (h7), (h6) v^k h(1ea, h(1G_r a, (0, \overline{0}(0), 0, 0, 0))) &= \\ = (h1), (h8) v^k (0, \overline{0}(0), r, 0, 0) = (k, \overline{0}(k), r, 0, 0). \end{aligned}$$

Wegen $(1, \tilde{p}, 0) \not\sim (r, 0, 0)$ folgt $1) \neq 2)$.

3.11 Folgerung

$\forall^3(\emptyset; f^2) \cap \text{Her}(3)$ ist ein konservativer Reduktionstyp.

§ 4 $\forall (\emptyset; f^1, g^1) \in \text{Her}(4)$ und $\forall (\emptyset; f^2) \in \text{Her}(4)$ sind

=====
konservative Reduktionstypen
=====

4.1 Voraussetzung

$M = (I_1, \dots, I_r)$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, sei eine 2-RM mit den Stopzuständen $r-1, r$, die auf $(1, \tilde{p}, 0)$ ($\tilde{p} \in \mathbb{N}_0$) ange-
setzt wird.

4.2 Kodierung der Funktionen aus § 3

Wir übernehmen die Definitionen aus 3.3, betrachten aber die dort aufgeführten Funktionsvariablen als Abkürzung für gewisse Worte über neuen Funktionsvariablen. Außerdem komme o.B.d.A. $(A_1, C_1 D_1)$ noch einmal unter den $(A_j, C_j D_j)$, $j = 2, \dots, 2^k$ vor.

Seien c, d, e' drei neue einstellige Funktionsvariablen, d.h. c, d, e' sollen nicht in Γ' :=

$\{G_1, \dots, G_r, H_1, \dots, H_r, f, g, o', o'', t', t, s', s, v\}$

auftreten. Sei $\tilde{r} := 2r + 10$.

Für $i=1, \dots, r$ seien $G_i, H_i, f, g, o', o'', t', t, s', s, v$

Abkürzungen für respektive

$(cd)^{\tilde{r}-1} d^{2\tilde{r}+1}$, $(cd)^{\tilde{r}-r-1} d^{2\tilde{r}+r+1}$, $(cd)^9 d^{3\tilde{r}-9}$, $(cd)^8 d^{3\tilde{r}-8}$,
 $(cd)^7 d^{3\tilde{r}-7}$, $(cd)^6 d^{3\tilde{r}-6}$, $(cd)^5 d^{3\tilde{r}-5}$, $(cd)^4 d^{3\tilde{r}-4}$,
 $(cd)^3 d^{3\tilde{r}-3}$, $(cd)^2 d^{3\tilde{r}-2}$, cc.

Dadurch wird jede der aufgezählten Funktionsvariablen aus § 3 durch $3\tilde{r}$ Funktionsvariablen aus $\{d, cd\}$ dargestellt.

Für $i=2, \dots, 2^k$ werden $(A_i, C_i D_i)$ als Abkürzungen aus § 3 übernommen; $A_1 := C_1 := D_1 := d^{3\tilde{r}}$.

Für $j=1, \dots, 2^k$ hat jedes

A_j die Form $a_1^j \dots a_{3\tilde{r}}^j$ und jedes

$C_j D_j$ die Form $b_1^j \dots b_{3\tilde{r}}^j b_{3\tilde{r}+1}^j \dots b_{6\tilde{r}}^j$.

mit $a_i^j, b_i^j \in \{d, cd\}$, $i=1, \dots, 3\tilde{r}$; $i'=1, \dots, 6\tilde{r}$.

Sei $\bar{A} := a_1^1 \dots a_1^{2^k} a_2^1 \dots a_2^{2^k} \dots a_{3\tilde{r}}^1 \dots a_{3\tilde{r}}^{2^k}$,

$\bar{B} := b_1^1 \dots b_1^{2^k} \dots b_{3\tilde{r}}^1 \dots b_{3\tilde{r}}^{2^k} b_{3\tilde{r}+1}^1 \dots b_{3\tilde{r}+1}^{2^k} \dots b_{6\tilde{r}}^1 \dots b_{6\tilde{r}}^{2^k}$.

Wir bauen $\bar{A}$ aus den A_j wie vorher bei B so auf, daß zuerst alle (von links gesehen) ersten Funktionen $a_1^1 \dots a_1^{2^k}$ von $A_1, \dots, A_{2^k}$ aufgeschrieben werden, dann alle zweiten usw.

Ebenso verfahren wir bei $\bar{B}$.

4.3 Die Formel $F_{M, \tilde{p}}$

$F_{M, \tilde{p}}$ sei die Formel $\forall x G_{M, \tilde{p}}$.

$G_{M, \tilde{p}}$ sei die Konjunktion der folgenden

Gleichungen und Ungleichungen:

$$[1'] \quad \bar{A}x = \bar{B}x;$$

$$[2'] \quad ccdx = ddccx;$$

$$[3'] \quad ccdx = dcdccx;$$

$$[+'] \quad v^k d G_1 f^{\tilde{p}} o' o' e' x \neq v^k d G_1 o' o' e' x.$$

4.4. Zur Heuristik

Der Unterschied zu § 3 besteht vor allem darin, daß durch die Kodierung mit d und cd Gleichung [2] durch [2'] und [3'] ersetzt werden kann (siehe Lemma 4.5). Damit werden zwei Allquantoren eingespart.

Die Hilfsfunktionen h und l sind hier nicht mehr notwendig. In der Ungleichung [+'] haben d (rechts von v^k) und e' die Rolle von e in [+'] übernommen. e kann so wegfallen.

4.5 Lemma

$$F_{M, \tilde{p}} \rightarrow \forall x (vdx = ddx \wedge vdx = d(cd)vx \wedge \\ \wedge v(cd)x = (cd)dvx \wedge v(cd)x = (cd)(cd)vx).$$

Beweis:

v ist eine Abkürzung für cc.

Es gilt:

ccdx = ddcx wegen [2'], ccdx = dcdccx wegen [3'] -
c auf [2'] von links angewendet, ergibt:

$$cccdx = cddccx.$$

c auf [3'] von links angewandt, ergibt:

$$cccdx = ccdccx.$$

4.6 Lemma II

Sei $F_{M, \tilde{p}}$ erfüllbar. Sei a ein beliebiges Element aus einem Modell von $F_{M, \tilde{p}}$.

Dann gibt es eine Menge L und eine (ev. endliche) Folge $(i(n), p(n), q(n))_{n \in L}$ mit folgenden Eigenschaften.

- (1) $(1, \tilde{p}, 0) \vdash_{n-1} (i(n), p(n), q(n))$ für alle $n \in L$;
- (2) $(i(n), p(n), q(n)) \not\vdash (r, 0, 0)$ für alle $n \in L$;
- (3) $E := v^k d G_1 f^{\tilde{p}} o' o' e' a = d(n)$,

$$\text{wobei } d(n) := v^k G_{i(n)} f^{p(n)} o' g^{q(n)} o' e' a.$$

Dabei ist $L = \mathbb{N}$, oder ein Anfangsstück $(1, \dots, k')$ von $\mathbb{N}$ mit $(i(k'), p(k'), q(k')) = (r-1, 0, 0)$.

Beweis:

Der Beweis verläuft analog 3.5, wenn man in 3.5 überall h und l wegläßt und die beiden Auftreten von e durch d (links) bzw. durch e' (rechts) ersetzt. Die Arbeit von [2] übernehmen [2'] und [3'], was aufgrund von Lemma 4.5 möglich ist.

Der einzige Unterschied zum Beweis von 3.5 besteht darin, daß man jetzt Ausdrücke der Länge $3\tilde{r}$ und $6\tilde{r}$ anstelle von Ausdrücken der Länge 1 und 2 betrachtet, was an der Beweisstruktur nichts ändert.

4.7 Voraussetzung

Im folgenden 4.8-4.11 halte die 2-RM

$M = (I_1, \dots, I_r)$ mit Eingabe $(1, \tilde{p}, 0)$ bei $(r-1, 0, 0)$ an.

4.8 Ein Modell für $F_{M, \tilde{p}}$

1) p^+ , $^-(i)$, Q und M' seien wie in 3.7 definiert.

2) Der Individuenbereich des Modells $\mathcal{M} = (M''; c, d, e')$:

$$M'' := \{0, \dots, 3\tilde{r}\} \times \{0, 1\}^2 \times M'.$$

3) $0'' := (0, 0, 0, 0, 0')$.

4) Für $i=1, \dots, r$, $(j, p, q) \in Q$ sei:

$$\tilde{G}_1(j, p, q) := \begin{cases} (1, p, q) & \text{falls } j=0, \\ (r+1, 0, 0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\tilde{H}_1(j, p, q) := \begin{cases} (1, 0, q) & \text{falls } j=0 \text{ u. } I_1 = s_1[\tilde{j}, \tilde{k}] \\ & \text{für } \tilde{j}, \tilde{k} \in \{1, \dots, r\}, \\ (1, p, 0) & \text{falls } j=0 \text{ u. } I_1 = s_2[\tilde{j}, \tilde{k}] \\ & \text{für } \tilde{j}, \tilde{k} \in \{1, \dots, r\}, \\ (r+1, 0, 0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(j, p, q) := \begin{cases} (0, p+1, q) & \text{falls } j=0, \\ (r+1, 0, 0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\tilde{g}(j, p, q) := \begin{cases} (0, p, q+1) & \text{falls } j=0, \\ (r+1, 0, 0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\overline{o'}(j, p, q) := \begin{cases} (0, 0, q) & \text{falls } j=0, \\ (r+1, 0, 0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\overline{o''}(j, p, q) := \begin{cases} (0, p, 0) & \text{falls } j=0, \\ (r+1, 0, 0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\overline{t}(j,p,q) := \begin{cases} (0,0,0) & \text{falls } j=0, \\ (r+1,0,0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\overline{t}(j,p,q) := \begin{cases} (0,p+1,0) & \text{falls } j=0, \\ (r+1,0,0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\overline{s}(j,p,q) := \begin{cases} (0,0,q+1) & \text{falls } j=0, \\ (r+1,0,0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\overline{s}(j,p,q) := \begin{cases} (0,p+1,q+1) & \text{falls } j=0, \\ (r+1,0,0) & \text{sonst.} \end{cases}$$

5) Für alle $x = (s,t,m,n,i,l,j,p,q) \in M'$

sei $cx :=$

$$:= \begin{cases} (s,t,1,0,i,\overline{l}(i),j,p,q) & \text{falls } s \leq t \text{ u. } m=n=0; \\ (s,t,1,1,i,\overline{l}(i),j,p,q) & \text{falls } s \leq t \text{ u. } m=0 \text{ u. } n=1; \\ (s,t,0,0,i+1,\overline{2l}(i+1),j,p,q) & \text{" } s \leq t \text{ u. } m=1 \text{ u. } n=0 \text{ u. } i < k; \\ (s,t,0,1,i+1,\overline{2l}(i+1),j,p,q) & \text{" } s \leq t \text{ u. } m=n=1 \text{ u. } i < k; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$dx :=$

$$:= \begin{cases} (d1) (0,t+1,0,1,i,\overline{l}(i),j,p,q) & \text{falls } s=0 \text{ u. } t+1 \leq 3\tilde{r}-2 \\ & \text{u. } m=0 \text{ u. } n=1 \text{ u. } \overline{l}(i) = \\ & = \overline{0}(i); \\ (d2) (s+1,t,0,1,i,\overline{l}(i),j,p,q) & \text{falls } s < t \text{ u. } s+1+t < 3\tilde{r} \\ & \text{u. } m=n=1 \text{ u. } \overline{l}(i) = \overline{0}(i); \\ (d3) (0,0,0,1,i,\overline{l}(i),Z(j,p,q)) & \text{falls } 2 \leq s < t \text{ u. } m=n=1 \\ & \text{u. } \overline{l}(i) = \overline{0}(i) \text{ u. } Z \in \Gamma \\ & \text{ist Abkürzung von} \\ & (cd)^{s+1}_d{}^t \text{ u.} \\ & \overline{Z}(j,p,q) \neq (r+1,0,0); \\ (d4) (s,t,0,1,i,\overline{l+1}(i),j,p,q) & \text{falls } s \leq t \text{ u. } s+t < 3\tilde{r} \text{ u.} \\ & \text{u. } (m,n) \neq (1,0) \text{ u.} \\ & [\overline{l}(i) \neq \overline{0}(i) \text{ o. } m=n=0] \\ (d5) 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$ex := (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) .$$

Aus diesen Definitionen sieht man, was die zu Q zusätzlichen ersten 4 Komponenten in etwa bedeuten: Mit den ersten beiden Komponenten werden die Funktionen $(cd)^s_d{}^t$

konstruiert; die 3. und 4. Komponente sagen, ob x die Form cy ($m=1, n=0$), dy ($m=0, n=1$) oder cdy ($m=n=1$) hat.

4.9 Folgerung

Für $m=2, \dots, 2^k$ sind nach Definition 3.8.4

$\bar{A}_m, \bar{C}_m, \bar{D}_m$ Funktionen auf Q . Es gilt

für alle $m = 2, \dots, 2^k$ und $x \in Q$:

$$\bar{A}_m x = \bar{C}_m \bar{D}_m x.$$

Beweis:

Nach 3.8.4 ist offensichtlich $\bar{A}_m x \sim \bar{C}_m \bar{D}_m x$
für alle $x \in Q$ und $m \in \{2, \dots, 2^k\}$.

4.10 Beweis von [1']:

Sei $x = (s, t, m, n, i, l, j, p, q) \in M'$. Wir machen eine Fallunterscheidung nach den Werten der einzelnen Komponenten von x .

1. Fall: $s=t=0$ u. $(m,n) \neq (1,0)$ u. $i=k$ u. $\bar{l}(k) \neq \bar{o}(k)$

Es ist

$$\bar{A}x = a_1^1 \dots a_{3\tilde{r}}^{\bar{l}(k)} (0, 0, 0, 1, k, \bar{o}(k), j, p, q),$$

$$\bar{B}x = b_1^1 \dots b_{6\tilde{r}}^{\bar{l}(k)} (0, 0, 0, 1, k, \bar{o}(k), j, p, q).$$

In diesem Fall ist die Relation $(A_{\overline{1+l}(k)}, C_{\overline{1+l}(k)} D_{\overline{1+l}(k)})$ anwendbar. Wegen $\bar{l}(k) \neq \bar{o}(k)$ ist $\overline{1+l}(k) \neq 1$, also ist

$$A_{\overline{1+l}(k)} \equiv (cd)^{s'} d^{t'}, \quad C_{\overline{1+l}(k)} \equiv (cd)^{\hat{s}} d^{\hat{t}} \quad \text{und} \quad D_{\overline{1+l}(k)} \equiv (cd)^{\tilde{s}} d^{\tilde{t}}$$

mit $s', \hat{s}, \tilde{s} \geq 2$ und $t', \hat{t}, \tilde{t} \leq 3\tilde{r}-2$.

Da jedes a_1^j und b_1^j aus $\bar{A}$ und $\bar{B}$ die Form d oder cd hat und

$$\text{da } a_1^{\overline{1+l}(k)} \equiv cd \equiv b_1^{\overline{1+l}(k)} \equiv b_{3\tilde{r}+1}^{\overline{1+l}(k)}, \quad a_1^1 \equiv b_1^1 \equiv b_{3\tilde{r}+1}^1 \equiv d$$

ist, gilt (m' passend):

$$\begin{aligned}\bar{A}x &= a_1^1 \dots da_1^{\overline{1+1}(k)} (s'-1, t', m', 1, k, 2^k-1, j, p, q) = \\ &= a_1^1 \dots d (s'-1, t', 1, 1, k, \overline{0}(k), j, p, q) = \\ &= a_1^1 \dots (0, 0, 0, 1, k, 1, \overline{A}_{1+1}(k)(j, p, q)) = \\ &= (0, 0, 0, 1, k, 1(k), \overline{A}_{1+1}(k)(j, p, q)) ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{B}x &= b_1^1 \dots b_{3\tilde{r}}^{2^k} (0, 0, 0, 1, k, 1(k), \overline{D}_{1+1}(k)(j, p, q)) = \\ &= (0, 0, 0, 1, k, 1(k), \overline{C}_{1+1}(k) \overline{D}_{1+1}(k)(j, p, q)) .\end{aligned}$$

Wegen $\overline{A}_{1+1}(k)(j, p, q) \sim \overline{C}_{1+1}(k) \overline{D}_{1+1}(k)(j, p, q)$ folgt $\bar{A}x = \bar{B}x$.

In allen anderen Fällen ergibt sich $\bar{A}x = \bar{B}x = 0''$:

2. Fall: $s > t$ o. $(s > 0$ u. $\overline{1}(i) \neq \overline{0}(i)$) o. $t+1 > 3\tilde{r}-1$ o. $(m, n) = (1, 0)$
Die letzten 2^k Funktionsvariablen in $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind jeweils $d \dots d$. Wegen $\underbrace{d \dots d}_{2^k\text{-mal}} = 0''$ gilt $\bar{A}x = \bar{B}x = 0''$.

3. Fall $s \leq t$ u. $t+1 < 3\tilde{r}-1$ u. $(m, n) \neq (1, 0)$ u. $i < k$
 $\bar{A}$ bzw. $\bar{B}$ haben die Form

$$a_1^1 \dots a_{\tilde{r}}^{2^k} \underbrace{d \dots d}_{2\tilde{r} \cdot 2^k - d's} \text{ bzw. } b_1^1 \dots b_{4\tilde{r}}^{2^k} \underbrace{d \dots d}_{2\tilde{r} \cdot 2^k - d's} .$$

Durch die Zählbedingung der 6. Komponente 1 wird (d1) an Stellen a_μ^v (bzw. b_μ^v) $\equiv d$ mit $\overline{0}(i) = \overline{1} + (2^i - 1) + w2^i(1)$, $w \in \mathbb{N}_0$, angewandt. Wegen $(2\tilde{r} \cdot 2^k) / 2^i \geq 4\tilde{r} > 3\tilde{r}$ sind das mindestens $(3\tilde{r}-1)$ -Stellen; falls $\bar{A}x$ oder $\bar{B}x$ nicht schon vorher gleich $0''$ sind, wächst t bis $3\tilde{r}-1$ und damit gilt $\bar{A}x = \bar{B}x = 0''$.

4. Fall: $s \leq t$ u. $t+1 < 3\tilde{r}-1$ u. $(m, n) \neq (1, 0)$ u. $i = k$ u. $\overline{1}(k) = \overline{0}(k)$

Entweder gilt $a_{3\tilde{r}-1}^{2^k} \dots a_{3\tilde{r}}^{2^k} x = b_{6\tilde{r}-1}^{2^k} \dots b_{6\tilde{r}}^{2^k} x = d \dots dx = 0'' = \bar{A}x = \bar{B}x$ oder es ist $s=0$ und die Relation $(A_1, C_1, D_1) = (d \dots d, d \dots dd \dots d)$ ist anwendbar. Wie im 3. Fall kann hier (d1) an $(3\tilde{r}-1)$ Stellen $a_\mu^v \equiv d$ (bzw. $b_\mu^v \equiv d$) benutzt werden, d.h. t wächst bis $3\tilde{r}-1$ und es ist $\bar{A}x = \bar{B}x = 0''$.

5. Fall sonst

Dann treffen bis auf $t > 0$ die Bedingungen des 1. Falles zu. Die Relation $(A_{\overline{1+1}(k)}, C_{\overline{1+1}(k)}, D_{\overline{1+1}(k)})$ ist anwendbar.

Es ist $A_{\overline{1+1}(k)} \equiv (cd)^{s'} d^{t'}$ mit $2 \leq s' \leq t' < 3\tilde{r} - 1$.

5. Fall 5.1 $t+t' \geq 3\tilde{r}-1$

Es ist $a_{t+2}^{\overline{1}(k)} \equiv a_{t+2}^{\overline{1+1}(k)} \equiv d$. Somit gilt für passendes m' :

$$\begin{aligned} \bar{A}x &= a_1^1 \dots a_{t+2}^{\overline{1}(k)} a_{t+2}^{\overline{1+1}(k)} (0, 3\tilde{r}-2, m', 1, k, 2^{k-1}, j, p, q) = \\ &= a_1^1 \dots d(0, 3\tilde{r}-2, 0, 1, k, 2^k, j, p, q) = 0''. \end{aligned}$$

Fall 5.2 $t'+t < 3\tilde{r}-1$

Dann gibt es ein $Z \in \Gamma$, $Z \neq v$, das Abkürzung von $(cd)^{s'-t} d^{t'+t}$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} a_t^{\overline{1+1}(k)} &\equiv cd \text{ und damit} \\ \bar{A}x &= a_1^1 \dots da_t^{\overline{1+1}(k)} \dots a_t^{2^k} (0, 0, m, 1, k, \overline{1}(k), \bar{Z}(j, p, q)) = \\ &= a_1^1 \dots dcd(0, 0, m'', 1, k, 2^{k-1}, \bar{Z}(j, p, q)) = \\ &= a_1^1 \dots d(0, 0, 1, 1, k, 2^k, \bar{Z}(j, p, q)) = 0''. \end{aligned}$$

Ganz analog wird $\bar{B}x = 0''$ bewiesen.

4.11 Beweis von [2'] und [3']:

Sei $x = (s, t, m, n, i, l, j, p, q) \in M'$.

Zu zeigen ist $ccdx = ddcx = dcdccx$.

Eine Fallunterscheidung nach m, n, l und $s \leq t$ ergibt:

1. Fall: $m = 0, n = 1, \bar{l}(i) = \bar{0}(i), s \leq t$

Es ist $ccdx = ddcx = dcdccx =$

$$= \begin{cases} (0, t+1, 0, 1, i+1, \bar{2}(i+1), j, p, q) & \text{falls } s=0 \text{ u. } t+1 \leq 3\tilde{r}-2 \\ & \text{u. } i < k; \\ 0'' & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Fall: $m = n = 1, \bar{l}(i) = \bar{0}(i), s \leq t$:

Es ist $ccdx = ddccx = dcdccx =$

$$= \begin{cases} (s+1, t, 0, 1, i+1, \bar{2}(i+1), j, p, q) & \text{falls } s < t \text{ u. } s+t < 3\tilde{r}-1 \text{ u. } i < k; \\ (0, 0, 0, 1, i+1, \bar{2}(i+1), \bar{Z}(j, p, q)) & \text{falls } Z \in \Gamma \setminus \{v\} \text{ Abkürzung von } (cd)^{s+1} d^t \text{ ist u. } \bar{Z}(j, p, q) \neq (r+1, 0, 0); \\ 0'' & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Fall: $m = n = 0, s \leq t$

Es ist $ccdx = ddccx = dcdccx =$

$$= \begin{cases} (s, t, 0, 1, i+1, \bar{2l+2}(i+1), j, p, q) & \text{falls } s+t < 3\tilde{r} \text{ u. } i < k; \\ 0'' & \text{sonst.} \end{cases}$$

4. Fall: $n = 1, l(i) \neq 0(i), s \leq t$

Es ist $ccdx = ddccx = dcdccx =$

$$= \begin{cases} (s, t, 0, 1, i+1, \bar{2l+2}(i+1), j, p, q) & \text{falls } s+t < 3\tilde{r} \text{ u. } i < k \text{ u. } \bar{l}(i) = \bar{0}(i); \\ 0'' & \text{sonst.} \end{cases}$$

5. Fall: $m = 1, n = 0, s \leq t$

Es ist $dx = ccdx = 0''$. Also ist auch $dcdccx = ddccx = 0''$.

6. Fall: Sonst

Wegen $cx = dx = 0''$ ist $ccdx = ddccx = dcdccx = 0''$.

4.12 Beweis von [†']

Sei $x \in M$. Es ist $o'o''e'x = (6, 3\tilde{r}-7, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} v^k d_{G_1} f^{\tilde{p}} o'o''e'x &= v^k d(\tilde{r}-2, 2\tilde{r}+1, 1, 1, 0, 0, 1, \tilde{p}, 0) = \\ &= v^k(0, 0, 0, 1, 0, 1, \tilde{p}, 0) = \\ &= (0, 0, 0, 1, k, 0, 1, \tilde{p}, 0) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^k d_{G_r} o'o''ex &= v^k d(\tilde{r}-r-1, 2\tilde{r}+r, 1, 1, 0, 0, r, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0, 1, k, 0, r, 0, 0) . \end{aligned}$$

Wegen $(r, 0, 0) \not\sim (1, \tilde{p}, 0)$ gilt [†'] .

4.13 Folgerung

$\forall (\emptyset; f^1, g^1) \wedge \text{Her}(4)$ und $\forall (\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(4)$ sind konservative Reduktionstypen.

§ 5 $\forall^6(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(2)$ ist ein konservativer Reduktionstyp
=====

5.1 Voraussetzung:

Im folgenden betrachten wir 2-Register-Maschinen
 $M = (I_1, \dots, I_r)$ ($r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) angesetzt auf $(1, \tilde{p}, 0)$.
 r und $r-1$ seien die Stopzustände von M .

Zu M definieren wir eine Formel $F_M, \tilde{p} \in$
 $\in \forall^6(\emptyset; f, f_0, \dots, f_r, l, h, [], < >) \wedge \text{Her}(2)$.

Dabei seien:

$f, f_0, \dots, f_r, l$ 1-stellige Funktionsvariablen,
 $h, []$ 2-stellige Funktionsvariablen,
 $< >$ eine 3-stellige Funktionsvariable.

5.2 Kodierung der Instruktionen

1) $r' := 2r-4$.

2) Für $i \in \{1, \dots, r-2\}$, $j, k \in \{1, \dots, r\}$, p, q Variable:

2.1 Falls $I_i = a_1[j]$:

$u_{2i}(p, q) := u_{2i+1}(p, q) :=$
 $:= [\langle f_i l p, l p, l q \rangle, \langle f_j l f p, l f p, l q \rangle]$.

2.2 Falls $I_i = a_2[j]$:

$u_{2i}(p, q) := u_{2i+1}(p, q) :=$
 $[\langle f_i l p, l p, l q \rangle, \langle f_j l p, l p, l f q \rangle]$.

2.3 Falls $I_i = s_1[j, k]$:

$u_{2i}(p, q) := [\langle f_i l f_0 p, l f_0 p, l q \rangle, \langle f_j l f_0 p, l f_0 p, l q \rangle],$
 $u_{2i+1}(p, q) := [\langle f_i l f p, l f p, l q \rangle, \langle f_k l p, l p, l q \rangle]$.

2.4 Falls $I_1 = s_2[j,k]$:

$$u_{2i}(p,q) := [\langle f_1lp, lp, lf_0q \rangle, \langle f_jlp, lp, lf_0q \rangle] ,$$

$$u_{2i+1}(p,q) := [\langle f_1lp, lp, lf_q \rangle, \langle f_klp, lp, lq \rangle] .$$

$$3) B := \langle f_1lf_{\tilde{f}_0p}, lf_{\tilde{f}_0p}, lf_{0p} \rangle$$

(Anfangskonfiguration).

5.3 $F_{M,\tilde{p}}$:-

$F_{M,\tilde{p}}$ sei die Formel $\forall x \forall y \forall z \forall t \forall p \forall q \ G_{M,\tilde{p}}$.

$G_{M,\tilde{p}}$ sei die Konjunktion aus folgender Gleichung und Ungleichung:

$$\begin{aligned} [1] \quad & h(x, h(y, h([y, z], t))) = \\ & = h(z, h([z, z], h(z, h(u_2(pq)), \dots \\ & \dots, h(z, h(u_r(p, q), h(x, h(y, h([y, z], t) \dots)), \\ [+] \quad & h(B, h(B, h([B, B], B))) \neq h(\langle f_rlf_{0p}, lf_{0p}, lf_{0p} \rangle, t). \end{aligned}$$

5.4 Heuristik

Ähnlich wie in § 3 und § 4 haben wir zu jeder 2-RM M mit Eingabe $(1, \tilde{p}, 0)$ eine Formel $F_{M,\tilde{p}}$ definiert, die die Bedingungen I und II aus 1.9 erfüllt.

Hier werden anstelle der Instruktionen

$I_1 = a_m[j]$ bzw. $s_m[j,k]$ die Einschrittübergänge zwischen den Konfigurationen kodiert.

Dazu verwenden wir zwei Kodierungsfunktionsvariablen,

$[], < >$, eine Hilfsfunktionsvariable l , die 1-stelligen

Funktionsvariablen $f_1, \dots, f_r$ für die Zustände $1, \dots, r$,

f_0 für die Null und f für die Addition von $\dagger 1$. Es gilt

$(+)(i, p, q) \vdash_1 (j, p', q') \Rightarrow$ Es gibt $n \in \{2, \dots, 2r-4\}, \hat{p}, \hat{q} \in \mathbb{N}_0$ mit $u_n(\hat{p}, \hat{q}) = [\langle f_1lp, lp, lq \rangle, \langle f_jlp', lp', lq' \rangle]$.

Die Arbeitskonfiguration (i, p, q) wird ebenso charakterisiert:

$$y := \langle f_1lp, lp, lq \rangle$$

Das Maschinenprogramm zusammen mit der Arbeitskonfiguration wird mit einer 2-stelligen Funktionsvariablen h aufgeschrieben:

$$(++) \ h(y, h([y, y], h(y, h(u_2(p, q), \dots, h(y, h(u_r, (p, q), \gamma) \dots))).$$

Wegen $(+)$ gibt es n , $\hat{p}$, $\hat{q}$ mit

$$u_n(\hat{p}, \hat{q}) = [y, z]$$

für ein gewisses z , das die Folgekonfiguration beschreibt. Den Übergang in die Folgekonfiguration wird an der Stelle u_n durch die Gleichung [1] besorgt:

$$\begin{aligned} h(u_{n-1}(\hat{p}, \hat{q}), h(y, h(u_n(\hat{p}, \hat{q}), t))) &= h(u_{n-1}(\hat{p}, \hat{q}), h(y, h[y, z], t)) \\ &= h(z, h([z, z], h(z, h(u_2, \dots, h(z, h(u_r, h(u_{n-1}, \dots, t) \dots)) \dots)) \dots) \dots) \\ [1] \end{aligned}$$

Der Term $(++)$ ist insgesamt also gleich:

$$(++) \ h(y, \dots, h(y, h(u_{n-2}, h(y, h(z, h([z, z]), h(z, h(u_2, \dots, h(z, h(u_r, \dots, t) \dots)) \dots)) \dots)) \dots).$$

$(+++)$ hat noch nicht die Form $(++)$; bei weiteren Transformationen mit Hilfe von [1] würden die späteren Konfigurationen noch weiter im Innern des Terms verschwinden und es wäre sehr schwierig festzustellen, ob z eine Stopkonfiguration ist.

Deshalb sorgen wir durch Einfügen eines trivialen Übergangs

$$[z, z] \text{ für beliebige } z = \langle f, lp', lp', lq' \rangle$$

dafür, daß durch $(2n-2)$ -malige Anwendung von [1] auf $[z, z]$ z an das linke Ende des Terms geschoben werden kann:

$$(++) = h(z, h([z, z], h(z, h(u_2, \dots, h(z, h(u_r, \dots, t') \dots)) \dots)).$$

Durch die Ungleichung [4] wird wie in § 3-4 erreicht, daß M nicht in $(r, 0, 0)$ anhält. Die 1-stellige Funktionsvariable l ermöglicht die Definition eines endlichen Modells von $F_{M, \tilde{p}}$, wenn M , angesetzt auf $(1, \tilde{p}, 0)$ in $(r-1, 0, 0)$ anhält.

5.5 Lemma (II)

Sei $F_{M,\tilde{p}}$ erfüllbar. Sei a ein beliebiges Element aus einem Modell von $F_{M,\tilde{p}}$. Dann gibt es (ev. endliche) Folgen $(i(n), p(n), q(n))_{n \in L}, (a(n))_{n \in L}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $(1, \tilde{p}, 0) \vdash_{n-1} (i(n), p(n), q(n))$ für alle $n \in L$;
- (2) $(i(n), p(n), q(n)) \neq (r, 0, 0)$ für alle $n \in L$;
- (3) $E := h(B, h(B, h([B, B], B))) =$
 $= h(d(n), h([d(n), d(n)], h(d(n)), h(u_2, \dots, h(d(n), h(u_r, a(n))),$
wobei $d(n) := \langle f_{i(n)}^{1f^{p(n)}} f_{0a}, 1f^{p(n)} f_{0a}, 1f^{q(n)} f_{0a} \rangle$.

Dabei ist $L = \mathbb{N}$ oder ein Anfangssegment $(1, \dots, k')$ von $\mathbb{N}$ mit $(r-1, 0, 0) = (i(k'), p(k'), q(k'))$.

Beweis durch Induktion nach n :

Bezeichnung: Bei Anwendung von Gleichung [1] werden die Variablen y, z durch kleine Pfeile " $\uparrow$ " bezeichnet.

$n = 1$:

Sei $(i(1), p(1), q(1)) := (1, \tilde{p}, 0)$. Dann ist (1) erfüllt, $d(1) = B_a^{(p)}$ und wegen $[\neq]$ ist $(i(1), p(1), q(1)) \neq (r, 0, 0)$.

Außerdem gilt:

$$E = h(B, h(B, h(\underset{\uparrow}{B}, h(\underset{\uparrow}{[B, B]}, B))) =$$

$$\underset{[1]}{=} h(B, h([B, B], \dots h(u_r, E) \dots)).$$

Mit $a(1) := E$ ist auch (3) erfüllt.

$n \Rightarrow n+1$

1. Fall: $(i(n), p(n), q(n)) = (r-1, 0, 0)$.

Dann gilt das Lemma für $L = (1, \dots, n)$.

5.7 Ein endliches Modell für $F_{M,\tilde{p}}$:

- 1) $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $i \mapsto \pi(i) := i\text{-te Primzahl}$.
- 2) $p^+ := 1 + \max(\{r\} \cup \{p \mid \exists i \exists q$
 $((1, \tilde{p}, 0) \vdash (i, p, q) \text{ oder } (1, \tilde{p}, 0) \vdash (i, q, p))\})$.
- 3) $p^{++} := \pi(2^{\pi(3^{p^+} \cdot 5^{p^+} \cdot 7^{p^+})} \cdot 3^{\pi(3^{p^+} \cdot 5^{p^+} \cdot 7^{p^+})}) + 1$.
- 4) $\vdash, \vdash_1, \vdash_1$ seien wie in 1.6.5 bzgl. p^+ definiert.
- 5) Der Individuenbereich des Modells
 $\mathcal{M} = (M; f, f_0, \dots, f_r, 1, h, [\], < >)$:
 $M := \{0, \dots, p^{++}\}$.

Seien nun $a, b, c \in M$, $i \in \{0, \dots, r\}$:

- 6) $f_1 a := i$;
- 7) $f a := a + 1$;
- 8) $1 a := \min\{a, p^+\}$;
- 9) $< a, b, c > := \pi(3^{1a} \cdot 5^{1a} \cdot 7^{1a})$;
- 10) $[a, b] := \pi(2^{\min\{a, <p^+, p^+, p^+\}} \cdot 3^{\min\{b, <p^+, p^+, p^+\}})$;
- 11) $A_1 := \{< k, p, q > \mid (1, \tilde{p}, 0) \vdash (k, p, q)\}$,
 $A_2 := \{[< k, p, q >, < j, p', q' >] \mid (k, p, q) \vdash_n (j, p', q') \text{ und}$
 $\text{und } n \in \{0, 1\} \text{ und } p, q, p', q' \leq p^+\}$,
 $A := \{1\} \cup A_1 \cup A_2$;
- 12) $h(a, b) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a, b \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

5.8 Bemerkung

- 1) Falls für $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $p, q, p', q' \in \mathbb{N}_0$ gilt:
 $(1, \tilde{p}, 0) \vdash (i, p, q) \vdash_1 (j, p', q')$,
 dann sind
 $i, p, q, j, p', q' < p^+$, $[< i, p, q >, < j, p', q' >] < p^{++}$.

Somit ist $A \subseteq \{0, \dots, p^{++}\}$.

2) $\{1\}$, A_1 , A_2 sind paarweise disjunkt.

3) Für alle $i \in \{2, \dots, r'\}$, $p, q \in M$ gilt:

$$u_1(p, q) \in A_2.$$

4) Für alle $a, b, c \in M'$ gilt:

$$h(a, h(b, c)) = 1 \Rightarrow h(b, c) = 1.$$

5) Für alle $a_1, \dots, a_m, b \in M, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$h(a_1, h(a_2, \dots, h(a_m, b) \dots)) = 1 \Rightarrow h(a_m, b) = 1.$$

5.9 Beweis von [1]:

Seien $a, b, c, d, p, q \in M$.

1. Fall: $1 = h(c, h([c, c], \dots, h(u_1(p, q), h(a, h(b, h([b, c], d) \dots)))$

Wegen 5.8.5 gilt auch:

$$1 = h(a, h(b, h([b, c], d))).$$

2. Fall: $1 = h(a, h(b, h([b, c], d)))$.

Dann sind $a, b, [b, c]$ und $d \in A$.

Insbesondere ist $[b, c] \in A_2$ und damit gibt es

$i, p, q, j, p', q' \leq p^+$ mit

$$(1) \ b = \langle i, p, q \rangle, \quad c = \langle j, p', q' \rangle, \quad (i, p, q) \vdash_{q_1} (j, p', q').$$

Wegen (1) und $b \in A$ ist $b \in A_1$ und damit ist

$$(2) \ p, q < p^+.$$

Aus (2) und

$$(1, \tilde{p}, 0) \vdash (i, p, q) \vdash_{q_1} (j, p', q')$$

folgt:

$$(1, \tilde{p}, 0) \vdash (j, p', q') \text{ d.h. } c \in A_1 \text{ und } [c, c] \in A_2.$$

Nach 5.8.3 ist für alle $i \in \{2, \dots, r'\}$ und

$$p, q \in M : u_1(p, q) \in A_2.$$

Also gilt für alle $i = 2, \dots, r'$:

$$(3) \quad 1 = h(a, h(b, h([b, c], d))) = h(u_1, 1) = \\ = h(c, 1) = h([c, c], 1).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & h(c, h([c, c], h(c, h(u_2(p, q), \dots, h(c, h(u_r, (p, q), \\ & \quad , h(a, h(b, h([b, c], d) \dots)) = \\ & = h(c, h([c, c], h(c, h(u_2(p, q), \dots, h(c, h(u_r, (p, q), 1) \dots)) = \\ & = h(c, h([c, c], h(c, h(u_2(p, q), 1)))) = \\ & = h(c, h([c, c], 1)) = \\ & = h(c, 1) = 1. \end{aligned}$$

5.10 Beweis von [‡]:

Seien $p, d \in M$ beliebig. Wegen

$$B = \langle f_1 lf_{\tilde{p}f_0p}, lf_{\tilde{p}f_0p}, lf_{0p} \rangle = \langle 1, \tilde{p}, 0 \rangle \in A_1$$

gilt

$$1 = h(B, h(B, h([B, B], B))).$$

Wegen

$$\langle f_r lf_{0p}, lf_{0p}, lf_{0p} \rangle = \langle r, 0, 0 \rangle \notin A$$

haben wir:

$$0 = h(\langle f_r lf_{0p}, lf_{0p}, lf_{0p} \rangle, d) \neq 1.$$

5.11 Korollar

$\forall^6(\emptyset; f^2) \wedge \text{Her}(2)$ ist ein konservativer Reduktionstyp.

§ 6 - 11 ENTSCHEIDBARKEIT VON ALLE (ALLE; f^1) $\cap$ HER (∞)

§ 6 Reduktion der Formeln aus alle (alle; f^1) $\cap$ Her (∞)
 =====
 auf Formeln "einfacherer" Gestalt
 =====

6.1 Gestalt der Formeln aus alle (alle; f^1) $\cap$ Her (∞)

Jede Formel $F \in \text{alle (alle; } f^1) \cap \text{Her } (\infty)$ ist äquivalent zu einer Formel der Gestalt

$$(+)\left\{ \begin{array}{l} Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \left[\bigwedge_{i=1}^r u_{i1} = u_{i2} \wedge \bigwedge_{i=r+1}^s u_{i1} \neq u_{i2} \wedge \right. \\ \left. \wedge \bigwedge_{i=s+1}^t p_i^{k(i)} \vec{u}_i \wedge \bigwedge_{i=t+1}^z \neg p_i^{k(i)} \vec{u}_i \right] \end{array} \right.$$

mit gewissen $n, r, s, t, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \leq s \leq t \leq z$,
 mit den $k(i)$ -stelligen Prädikatenvariablen $p_i^{k(i)}$,
 $i = s+1, \dots, z$, und den Termen $\vec{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{ik(i)})$,
 $i = 1, \dots, z$.

Die Terme sind dabei aus der einstelligen Funktionsvariablen f^1 und den gebundenen Variablen $x_1, \dots, x_n$ aufgebaut.

6.2 Bemerkung

Eine Formel F der Gestalt (+) ist äquivalent zu der Formel G folgender Gestalt:

$$(++)\left\{ \begin{array}{l} Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \left[\bigwedge_{i=1}^r u_{i1} = u_{i2} \wedge \bigwedge_{i=r}^s u_{i1} \neq u_{i2} \wedge \right. \\ \left. \bigwedge_{(i,j) \in M} (p_i^{k(i)} \vec{u}_i \wedge \neg p_j^{k(j)} \vec{u}_j) \wedge \bigwedge_{i \in N} p_i^{k(i)} \vec{u}_i \wedge \bigwedge_{i \in N'} \neg p_i^{k(i)} \vec{u}_i \right] \end{array} \right.$$

wobei gilt:

$M := \{(i, j) \mid s+1 \leq i \leq t \text{ u. } t+1 \leq j \leq z \text{ u. } (p_i^{k(i)} \text{ und } p_j^{k(j)} \text{ repräsentieren die gleiche Prädikatsvariable } p^{k(i)})\}$,

$N := \{i | s+1 \leq i \leq t \text{ u. } \neg \exists j ((i,j) \in M)\}$,

$N' := \{i | t+1 \leq i \leq z \text{ u. } \neg \exists j ((j,i) \in M)\}$.

d.h. in G' werden alle Kombinationen von positiven (i) und negativen (j) Auftreten jeder Prädikatenvariablen einzeln betrachtet $((i,j) \in M)$. Prädikatenvariablen, die nur positiv (N) oder nur negativ (N') auftreten, werden gesondert betrachtet.

6.3 Lemma

Eine Formel G' der Gestalt $(++)$ (siehe 6.2) ist genau dann in einem Individuenbereich I erfüllbar, wenn es die Formel G ist. Dabei hat G folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} & Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \left[\bigwedge_{i=1}^r u_{i1} = u_{i2} \wedge \bigwedge_{i=r+1}^s u_{i1} \neq u_{i2} \wedge \right. \\ (++) & \left. \wedge \bigwedge_{(i,j) \in M} (P_i^{k(i)} \vec{u}_i \wedge \neg P_j^{k(j)} \vec{u}_j) \right] \end{aligned}$$

Beweis:

" $\Rightarrow$ " : klar. " $\Leftarrow$ " : Ist G in I erfüllbar, so ist es G' ebenfalls, indem man alle Prädikatenvariablen aus N konstant mit "wahr", alle Prädikatenvariablen aus N' mit "falsch" belegt und sonst die gleiche Belegung wie für G nimmt.

6.4 Skolemform

Die Skolemform einer Formel G der Gestalt $(++)$ ist eine zu G bzgl. der Erfüllbarkeit äquivalente Formel G der Gestalt: ($m \geq 0$)

$$(4+) \left\{ \begin{aligned} & \forall y_1 \dots \forall y_m \left[\bigwedge_{i=1}^r u'_{i1} = u'_{i2} \wedge \bigwedge_{i=r+1}^s u'_{i1} \neq u'_{i2} \wedge \right. \\ & \left. \wedge \bigwedge_{(i,j) \in M} (P_i^{k(i)} \vec{u}'_i \wedge \neg P_j^{k(j)} \vec{u}'_j) \right] \end{aligned} \right.$$

wobei m die Anzahl der in $Q_1, \dots, Q_n$ auftretenden Allvariablen ist; $\vec{u}'_i$ entsteht aus $\vec{u}_i$, indem man jede Existenzvariable x_k durch $\varphi_r(y_1, \dots, y_r)$ ersetzt, wobei r' die Anzahl der vor x_k stehenden Allvariablen ist und indem man die l -te Allvariable durch y_l ersetzt. Die neuen r' -stelligen Funktionsvariablen φ_r , heißen Skolemfunktionen.

6.5 Gestalt der Terme in G, die Menge U:

Jeder Term in G hat die Form

$$(5+) \quad f^s \varphi_k \vec{y} \quad \text{oder} \quad f^s y_k,$$

mit $s \in \mathbb{N}_0$, $k' \in \{1, \dots, m\}$; $\vec{y} = (y_1, \dots, y_k)$,

φ_k k -stellige Skolemfunktion, $k \in \{0, \dots, m\}$

Terme der Form (5+) nennen wir schwach normal.

Ist M eine Menge von Termen oder Gleichungen, so sei $U(T)$ die Menge der schwachnormalen Terme von M mit $s = 0$.

6.6 Voraussetzung

Im folgenden betrachten wir Skolemformeln der Gestalt (4+) mit $m \geq 1$.

Aus der Entscheidbarkeit der Menge dieser Formeln folgt die Entscheidbarkeit von alle $(\text{alle}; f^1) \wedge \text{Her}(\infty)$, da für $m = 0$ bekanntlich ein Entscheidungsverfahren existiert [Gu3].

6.7 Lemma:

Eine Skolemformel G der Gestalt (4+) ist genau dann erfüllbar, wenn alle Formeln $G_{r+1}, \dots, G_s, G_{(i,j)} ((i,j) \in M)$ erfüllbar sind: ($k=r+1, \dots, s$)

$$G_k := \forall y_1 \dots \forall y_m \left(\bigwedge_{i=1}^r u'_{i1} = u'_{i2} \wedge u'_{k1} \neq u'_{k2} \right),$$

$$G_{(i,j)} := \forall y_1 \dots \forall y_m \left(\bigwedge_{l=1}^r u'_{l1} = u'_{l2} \wedge p_i^{k(i)} \vec{u}'_1 \wedge \neg p_j^{k(j)} \vec{u}'_j \right).$$

Beweis:

" $G \Rightarrow G_{r+1}, \dots, G_s, G_{(i,j)}$ " : klar.

" $\Leftarrow$ ":

Seien G_k bzw. $G_{(i,j)}$ ($k=r+1, \dots, s; (i,j) \in M$) in (I_k, ϕ_k) bzw. (I_{ij}, ϕ_{ij}) erfüllt.

$$I := \prod_{k=r+1, \dots, s} I_k \times \prod_{(i,j) \in M} I_{ij}.$$

Mit p_k bzw. p_{ij} bezeichnen wir die Projektionen von I auf I_k . Wir erweitern die Modelle von $G_{(i,j)}$ auf Modelle, in denen alle in G auftretenden Funktionen definiert sind, indem wir für nicht in $G_{(i,j)}$ vorkommende Funktionen beliebige Werte nehmen. Sei g eine m' -stellige Funktionsvariable, P eine m' -stellige Prädikatenvariable und $\vec{x} \in I^{m'}$:

$$\phi g \vec{x} := \prod_{k=r+1, \dots, s} \phi_k g(p_k \vec{x}) \times \prod_{(i,j) \in M} \phi_{ij} g(p_{ij} \vec{x}),$$

$$\phi P \vec{x} := w \Leftrightarrow \exists i [P \equiv p_i \text{ u. } \exists j ((i,j) \in M \text{ u. } \phi_{ij} \vec{x} = p_{ij} \vec{x})].$$

$$\exists \vec{a} (\vec{a} \in I_{ij}^m \text{ u. } \phi_{ij} \vec{u}_i(\vec{a}) = p_{ij} \vec{x}) \text{ u. } \forall k \forall l ((k,l) \in M \text{ u. } P \equiv p_k \text{ u. } \vec{u}_k \equiv \vec{u}_l \Rightarrow \exists \vec{b} (\vec{b} \in I_{kl}^m \text{ u. } \phi_{kl} \vec{u}_k(\vec{b}) = p_{kl} \vec{x}))$$

$$P \equiv p_k \text{ u. } \vec{u}_k \equiv \vec{u}_l \Rightarrow \exists \vec{b} (\vec{b} \in I_{kl}^m \text{ u. } \phi_{kl} \vec{u}_k(\vec{b}) = p_{kl} \vec{x})$$

Mit dieser Belegung ϕ wird G in I wahr. Denn angenommen, es gäbe $(i,j) \in M$ und $\vec{a} \in I^m$ mit $\phi p_j \vec{u}_j(\vec{a}) = w$. Dann gibt es nach Konstruktion von G ein k mit $(k,j) \in M$ und ein $\vec{b} \in I_{kj}^m$ mit

$$\phi_{kj} \vec{u}_k(\vec{b}) = p_{kj} \phi \vec{u}_j(\vec{a}) = \phi_{kj} \vec{u}_j(p_{kj} \vec{a}).$$

Somit gilt $\phi_{kj} p_j \vec{u}_j(p_{kj} \vec{a}) = w$ im Widerspruch zur Vor. über $G_{(k,j)}$.

6.8 Lemma

Eine Formel F der Gestalt ($k \in \mathbb{N}$)

$$\forall \vec{y} \left(\bigwedge_{i=1, \dots, r} u'_{i1} = u'_{i2} \wedge p^k \vec{u}' \wedge \neg p^k \vec{v}' \right)$$

ist genau dann erfüllbar, wenn die Formel G erfüll-

bar ist:

$$G := \forall \vec{y} \forall \vec{z} \left(\bigwedge_{i=1, \dots, r} u'_{i1} = u'_{i2} \wedge \left(\bigvee_{i=1, \dots, k} u'_i(\vec{y}) \neq v'_i \left(\frac{\vec{y}}{\vec{z}} \right) \right) \right).$$

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Sei F wahr in (I, ϕ) .

Dann gilt:

$$(o) \quad \{ \vec{u}'(\vec{x}) \mid \vec{x} \in I^m \} \cap \{ \vec{v}'(\vec{x}) \mid \vec{x} \in I^m \} = \emptyset$$

Also gilt für alle $\vec{a}, \vec{b} \in I^m$

$$\bigvee_{i=1, \dots, k} u'_i(\vec{a}) \neq v'_i(\vec{b})$$

Somit ist G wahr in (I, ϕ) .

" $\Leftarrow$ ": Sei G wahr in (I, ϕ) .

Da für alle $\vec{a} \in I^m$ gilt:

$$\vec{u}'(\vec{a}) \notin \{ \vec{v}'(\vec{b}) \mid \vec{b} \in I^m \}$$

ist (o) in (I, ϕ) gültig:

$$\tilde{\phi} \text{ p}^k \vec{a} := w : \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } \vec{b} \in I^m \text{ mit } \vec{a} = \vec{u}'(\vec{b})$$

Sonst sei $\tilde{\phi} := \phi$.

Dann ist wegen (o) F offensichtlich in $(I, \tilde{\phi})$ wahr.

6.9 Folgerung

Um die Entscheidbarkeit von alle $(\text{alle}, f^1) \cap \text{Her}(\infty)$ nachzuweisen, genügt es, die Entscheidbarkeit von Formeln der Gestalt (Δ) zu betrachten:

$$(\Delta) \quad \forall x_1 \dots \forall x_n \left(\bigwedge_{i=1, \dots, r} u_{i1} = u_{i2} \wedge \left(\bigvee_{i=r+1, \dots, s} u_{i1} \neq u_{i2} \right) \right)$$

Dabei seien $n, r, s \in \mathbb{N}$, $r < s$.

Die Terme $u_{11}, \dots, u_{s2}$ sind schwach normal.

§ 7 Die Systeme R, S und S⁺ =====

7.1 Bemerkung

Jede Struktur, in der eine Formel $F \in \mathcal{V}^\infty(\emptyset; \Psi) \cap \text{Her}(\infty)$ gilt, muß alle Gleichungen $\forall x_1 \dots \forall x_n (u_i = v_i)$, $1 \leq i \leq r$, und alle Folgerungen daraus erfüllen.

In S und S⁺ lassen sich alle Gleichungen ableiten, die aus $\bigwedge_{i=1, \dots, r} \forall x_1 \dots \forall x_n (u_i = v_i)$ folgen.

In R $\subseteq$ S lassen sich diejenigen Gleichungen ableiten, deren Terme schwach normal sind (siehe 9.7).

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften der Herleitungen in R, S und S⁺ bewiesen, mit denen sich die Herleitungen in "normale" Herleitungen umformen lassen.

7.2 Voraussetzung

Im folgenden betrachten wir eine feste endliche Menge von Gleichungen

$$u_1 = v_1, \dots, u_r = v_r, \quad (r \in \mathbb{N})$$

wobei die Terme $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r$ schwach normal sind und höchstens die freien Variablen $a_1, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}$, auftreten.

Die Terme haben also die Gestalt (φ Skolemfunktion):

$$f^p_{a_i} \quad \text{oder} \quad f^p \varphi(a_1, \dots, a_k), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i, k \in \{0, \dots, n\}, i \geq 1.$$

Es existiere eine 0-stellige Skolemfunktion.

7.3 Bezeichnung

Freie Variablen bezeichnen wir mit $a, b, c, a_1, b_1, \dots$, Skolemfunktionen mit $\varphi, \psi, \omega, \dots$,

Terme mit $s, t, u, v, w, \dots$,

Terme, in denen a, u oder φ auftritt, mit $s(a), t(u), \phi(\varphi)$,

Elemente von N_0 mit $c, d, e, g, h, p, q, \dots$;

$T(M)$ sei die Menge der Terme einer Menge M .

Ist $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, φ k -stellige Skolemfunktion und $k \leq n$, so schreiben wir oft $\varphi \vec{x}$ anstelle von $\varphi(x_1, \dots, x_k)$.

7.4 Terme, Axiome und Schlußregeln des Systems R

Die Terme von R haben die Gestalt $f^p a$ oder $f^p \varphi \vec{a}$ wobei φ unter den Skolemfunktionen von $u_1, v_1, \dots, u_r, v_r$ auftritt.

(RO) Axiome:

a) nichttriviale Axiome:

$$R \vdash u_1 = v_1, \dots, R \vdash u_r = v_r.$$

b) triviale Axiome:

$$R \vdash u = u \quad \text{für alle } u \in T(R).$$

Schlußregeln:

(R1) eingeschränkte Substitutionsregeln:

$$a) R \vdash f^p a = f^q a \text{ und } p \neq q \implies$$

$$R \vdash f^p u = f^q u \text{ für alle } u \in T(R).$$

$$b) R \vdash f^p a = f^q b \text{ und } a \neq b \implies$$

$$R \vdash f^p u = f^q v \text{ für alle } u, v \in T(R).$$

$$c) R \vdash f^p a_i = f^q_{ik} \vec{a} \text{ und } k < i \implies R \vdash f^p u = f^q_{ik} a_i \text{ für alle } u \in T(R).$$

(R2) Verträglichkeit von f mit $" = "$:

$$R \vdash u = v \implies R \vdash f^p u = f^p v \text{ für alle } p \in N_0.$$

(R3) Transitivität:

Für alle $p, q, r, s, k \in N_0$ gelte:

$$R \vdash f^p u = f^q v \text{ und } R \vdash f^r v = f^s w \text{ und } q = r + k \implies \\ \implies R \vdash f^p u = f^{s+k} w.$$

7.5 Terme, Axiome und Schlußregeln des Systems S

Die Terme von S bestehen aus allen Termen, die sich aus den in $u_1, v_1, \dots, u_r, v_r$ auftretenden Skolemfunktionen und freien Variablen bilden lassen.

(S0) Axiome:

Die Axiome von S seien alle in R ableitbaren Gleichungen.

(S1) Substitutionsregel: ($k \in \{1, \dots, n\}$)

$S \vdash u(\vec{a}) = v(\vec{a})$ und $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \Rightarrow$
 $S \vdash u(\vec{s}) = v(\vec{s})$ für alle $\vec{s} \in T(S)^k$.

(S2) Verträglichkeit von f mit "=":

$S \vdash u = v \Rightarrow S \vdash f^k u = f^k v$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(S3) Verträglichkeit der Skolemfunktionen mit "=":

$S \vdash u_1 = v_1, \dots, S \vdash u_k = v_k \Rightarrow S \vdash \varphi(u_1, \dots, u_k) =$
 $= \varphi(v_1, \dots, v_k)$
 für alle k-stelligen Skolemfunktionen φ , die in S auftreten.

(S4) Transitivität

$S \vdash u = v$ und $S \vdash v = w \Rightarrow S \vdash u = w$.

(S5) Symmetrie:

$S \vdash u = v \Rightarrow S \vdash v = u$.

7.6 Folgerung:

Sei P^+ die Menge der Gleichheitsformeln mit Termen aus $T(S)$, die in PLIF aus den nichtlogischen Axiomen (+) $u_1 = v_1, \dots, u_r = v_r$ hergeleitet werden können.

1) $S \vdash u = v$ gilt für alle $u = v \in P^+$.

2) $\exists x_1 \dots \exists x_l (u=v)$, $l \in \mathbb{N}_0$, ist genau dann in P^+ her-

leitbar, wenn es $t_1, \dots, t_l \in T(S)$ gibt mit
 $S \vdash u(t_1, \dots, t_l) = v(t_1, \dots, t_l)$.

- 3) $\forall \vec{x} \ u=v$ ist genau dann in P^+ herleitbar, wenn
 $S \vdash u(\vec{a}) = v(\vec{a})$ gilt.
- 4) $R \vdash u=v \Rightarrow S \vdash u=v$.

7.7 Konvention

Im folgenden verzichten wir auf explizite Angabe der Symmetrieschlüsse und rechnen mit $v = u$ bzw. mit $u = v$, je nachdem welche Form gerade benötigt wird.

7.8 Lemma

- 1) Das Ergebnis aus einem (R2)-Schluß und anschließendem (R3)-Schluß läßt sich auch aus einem (R3)-Schluß mit anschließendem (R2)-Schluß herleiten.
- 2) Das Ergebnis zweier aufeinanderfolgender (R3)-Schlüsse ist unabhängig von der Reihenfolge der (R3)-Schlüsse.
- 3) Ein (R3)-Schluß mit einem trivialen Axiom läßt sich durch einen (R2)-Schluß ersetzen.
- 4) Zwei hintereinander ausgeführte (S1)-Schlüsse lassen sich zu einem einzigen (S1)-Schluß zusammenfassen.
- 5) Das Ergebnis aus einem (S1)-Schluß, $i=2,3,4$, mit anschließendem (S1)-Schluß läßt sich auch aus (S1)-Schlüssen mit anschließendem (S1)-Schluß ableiten.

6) Jede Herleitung von $u=v$ der Form

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{u_{10} = u_{11} \quad v_{10} = v_{11}}_{(R3)} & \underbrace{u'_{10} = u'_{11} \quad v'_{10} = v'_{11}}_{(R3)} & \\
 \underbrace{u_{20} = u_{21} \quad v_{20} = v_{21}}_{(R3)} & \underbrace{u'_{20} = u'_{21} \quad v'_{20} = v'_{21}}_{(R3)} & \backslash RT \\
 \vdots & \vdots & \\
 \underbrace{u_{k0} = u_{k1} \quad v_{k0} = v_{k1}}_{(R3)} & \underbrace{u'_{10} = u'_{11} \quad v'_{10} = v'_{11}}_{(R3)} & \\
 \underbrace{u_{(k+1)0} = u_{(k+1)1}}_{(R3)} & \underbrace{u'_{(1+1)0} = u_{(1+1)1}}_{(R3)} & \\
 & u = v &
 \end{array}$$

läßt sich in eine Herleitung von $u = v$ der Form

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{\tilde{u}_{10} = \tilde{u}_{11} \quad \tilde{v}_{10} = \tilde{u}_{11}}_{(R3)} & & \\
 \vdots & & \\
 \underbrace{\tilde{u}_{m0} = \tilde{u}_{m1} \quad \tilde{v}_{m0} = \tilde{v}_{m1}}_{(R3)} & & \\
 u = v & &
 \end{array}$$

umwandeln. Die neue Herleitung enthält die gleiche Anzahl an (R3)-Schlüssen.

Beweis:

1) Wir zeigen durch Fallunterscheidung für alle Terme

$u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in T(R)$ und alle $k' \in \mathbb{N}$:

Unter der Voraussetzung,

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u_2 \quad \Rightarrow \quad f^{k'}_{u_1} = f^{k'}_{u_2} \\ (R2) \quad v_1 = v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow w_1 = w_2 \quad (R3)$$

gibt es Terme w_3, w_4 mit

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{array} \right\} w_3 = w_4 \Rightarrow w_1 = w_2 \quad (R2)$$

(R3)

Beweis:

Sei $u_1 := f^a s$, $u_2 := f^b t$, $v_1 := f^c t$, $v_2 := f^d r$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ und $s, t, r \in T(R)$. Seien $l, l' \in \mathbb{N}_0$.

1. Fall: $b+l = c$ u. $b + k' = c+l'$

Dann ist $w_1 \equiv f^{a+k'} s$ und $w_2 \equiv f^{d+l'} r$.

$w_3 := f^{a+l} s$, $w_4 := f^d r$ und ein anschließender (R2)-Schluß mit $k := k'-1 = l'$ erfüllen die Behauptung.

2. Fall: $b+l=c$ und $b+k'+l'=c$

$w_3 := f^{a+l} s \equiv w_1$, $w_4 := f^d r \equiv w_2$, $k := 0$.

3. Fall: $b=c+l$ und $b+k'+l'=c$

Dann ist $l=k'=l'=0$, und $b=c$.

$w_3 := f^a s \equiv w_1$, $w_4 := f^d r \equiv w_2$, $k := 0$.

4. Fall: $b=c+l$ und $b+k'=c+l'$

Es ist $l \leq l'$, $w_1 \equiv f^{a+k'} s$ und $w_2 \equiv f^{d+l'} r$.

$w_3 := f^a s$, $w_4 := f^{d+l} r$, $k := l'-l$.

2) Ähnlich wie in 1) ist eine Fallunterscheidung durchzuführen und das Ergebnis nachzuprüfen.

3) Ein (R3)-Schluß mit einem trivialen Axiom hat die Gestalt $(a, \dots, d \in \mathbb{N}_0; d := \max \{c-b, 0\})$:

$$\left. \begin{array}{l} f^a s = f^b t \\ f^c t = f^d t \end{array} \right\} \Rightarrow f^{a+d} s = f^{b+d} t. \quad (R3)$$

Offensichtlich läßt sich dafür schreiben:

$$f^a s = f^b t \Rightarrow f^{a+d} s = f^{b+d} s. \quad (R2)$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad S \vdash u(\vec{a}, b, \vec{c}) = v(\vec{a}, b, \vec{c}) &\Rightarrow S \vdash u(\vec{s}, w(a'), \vec{t}) = \\
 &\quad (S1) \\
 = v(\vec{s}, w(a'), \vec{t}) &\Rightarrow S \vdash u(\vec{s}, w(s'), \vec{t}) = v(\vec{s}, w(s'), \vec{t}) \\
 &\quad (S1)
 \end{aligned}$$

läßt sich umwandeln in:

$$S \vdash u(\vec{a}, b, \vec{c}) = v(\vec{a}, b, \vec{c}) \Rightarrow S \vdash u(\vec{s}, w(s'), \vec{t}) = v(\vec{s}, w(s'), \vec{t}). \quad (S1)$$

5) 1. Fall: (S2) und dann (S1)

$$\begin{aligned}
 S \vdash u(x) = v(x) &\Rightarrow S \vdash fu(x) = fv(x) \Rightarrow S \vdash fu(w) = fv(w) \\
 &\quad (S2) \qquad \qquad \qquad (S1)
 \end{aligned}$$

läßt sich umwandeln in:

$$\begin{aligned}
 S \vdash u(x) = v(x) &\Rightarrow S \vdash u(w) = v(w) \Rightarrow S \vdash fu(w) = fv(w). \\
 &\quad (S1) \qquad \qquad \qquad (S2)
 \end{aligned}$$

2. Fall: (S3) und dann (S1): analog Fall a)

3. Fall: (S4) und dann (S1):

$$\left. \begin{aligned} S \vdash u(x) = v' \\ S \vdash v' = v(x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Rightarrow S \vdash u(x) = v(x) \Rightarrow S \vdash u(w) = v(w) \\ &\quad (S4) \qquad \qquad \qquad (S1) \end{aligned}$$

läßt sich umwandeln in:

$$\left. \begin{aligned} S \vdash u(x) = v'(x) &\Rightarrow S \vdash u(w) = v'(w) \\ S \vdash v'(x) = v(x) &\Rightarrow S \vdash v'(w) = v(w) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Rightarrow S \vdash u(w) = v(w). \\ &\quad (S4) \end{aligned}$$

(S1)

6) Der weggeschnittene Term $u'_{(l+1)0}$ des letzten (R3)-Schlusses habe die Form $f^a s$.

Durch iteriertes Anwenden von 7.8.2 läßt sich die Herleitung RT von $u'_{(l+1)0} = u'_{(l+1)1}$ folgendermaßen ändern:

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\hat{u}_{10} = \hat{u}_{11} \quad \hat{v}_{10} = \hat{v}_{11}}_{(R3)} \\
 &\quad \underbrace{\hat{u}_{20} = \hat{u}_{21} \quad \hat{v}_{20} = \hat{v}_{21}}_{(R3)} \\
 &\quad \quad \quad \dots \quad \underbrace{\hat{u}_{10} = \hat{u}_{11} \quad \hat{v}_{10} = \hat{v}_{11}}_{(R3)} \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad u'_{(l+1)0} = u'_{(l+1)1},
 \end{aligned}$$

wobei alle $\hat{u}_{i0}$ ($i=1, \dots, l$) die Form $f^{v(i)}_s$ haben, jeweils $\hat{u}_{11}$ und $\hat{v}_{10}$ wegggeschnitten werden und jeweils $\hat{v}_{11}$ und $\hat{u}_{(i+1)0}$ die gleiche Gestalt

$f^{a(i)}_{s_1}$ und $f^{b(i)}_{s_1}$ ($a(i), b(i) \in N_0, s_1 \in U(R)$) haben.

Die gewünschte Herleitung von $u = v$ ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{u_{10} = u_{11} \quad v_{10} = v_{11}}_{(R3)} \\
 & \quad \cdot \cdot \cdot \underbrace{u_{(k+1)0} = u_{(k+1)1} \quad \hat{u}_{10} = \hat{u}_{11}}_{(R3)} \\
 & \quad \quad \cdot \cdot \cdot \underbrace{\tilde{u}_{(k+2)0} = \tilde{u}_{(k+2)1} \quad \hat{v}_{10} = \hat{v}_{11}}_{(R3)} \\
 & \quad \quad \quad \cdot \cdot \cdot \underbrace{\tilde{u}_{(k+3)0} = \tilde{u}_{(k+3)1} \quad \hat{v}_{20} = \hat{v}_{21}}_{(R3)} \\
 & \quad \quad \quad \quad \cdot \cdot \cdot \underbrace{\tilde{u}_{(k+l+1)0} = \tilde{u}_{(k+l+1)1} \quad \hat{v}_{10} = \hat{v}_{11}}_{(R3)} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad u = v
 \end{aligned}$$

7.9 Satz

Ist $f^1 u(s) = v(t)$ in (R) ohne (R1) herleitbar, so gibt es eine Herleitung der folgenden Form:

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{u(s)=u_{11} \quad v_{10}=v_{11}}_{(R3)} \\
 \underbrace{u_{20}=u_{21} \quad v_{20}=v_{21}}_{(R3)} \\
 \underbrace{u_{30}=u_{31} \quad v_{30}=v_{31}}_{(R3)} \\
 (+) \quad \dots \quad \underbrace{u_{(m-1)0}=u_{(m-1)1} \quad v_{(m-1)0}=v_{(m-1)1}}_{(R3)} \\
 \\
 u_{m0} = u_{m1} \\
 \Downarrow (R2) \\
 f^1 u_{m0} = f^1 u_{m1}
 \end{array}$$

wobei $f^1 u_{m1} \equiv v(t)$ ist und $u(s) = v_{11}$, $v_{10} = v_{11}$, $v_{20} = v_{21}$, ..., $v_{(m-1)0} = v_{(m-1)1}$ nicht-triviale Axiome sind. Jedes u_{i0} hat die Gestalt $f^{1(i)} s$ für $i=2, \dots, m$.

Die Gesamtzahl der (R2)- und (R3)-Schlüsse der neuen Herleitung ist nicht größer als bei der alten Herleitung.

Beweis:

Da wir nach Voraussetzung die Symmetrie von " $=$ " nicht beachten, setzt sich eine Herleitung von $u(s) = v(t)$ aus Axiomen, (R2)- und (R3)-Schlüssen zusammen. (R3)-Schlüsse mit trivialen Axiomen kann man durch einen (R2)-Schluß ersetzen (wegen 7.8.3).

Wegen 7.8.1 kann man alle (R2)-Schlüsse zu einem (R2)-Schluß ganz am Ende zusammenfassen. Hat die Herleitung noch keine lineare Form, so läßt sie sich mit 7.8.6 auf diese Gestalt bringen. Weiteres Umordnen mit Hilfe von 7.8.2 gibt jedem u_{i0} die Gestalt $f^{1(i)} s$.

Offensichtlich nimmt die Gesamtzahl der (R2)- und (R3)-Schlüsse beim Umordnen nicht zu.

7.10 Terme, Axiome und Schlußregeln des Systems S^+

Die Terme von S^+ sind die Terme von S .

(S^+0) Axiome von S^+ sind alle mit

(S0)-(S2) herleitbaren Gleichungen von S .

Schlußregeln von S^+ sind: ($k \in \mathbb{N}_0$)

(S^+1, k) Für $i=1, \dots, l: S^+ \vdash s_i = t_i \Rightarrow S^+ \vdash f^k_{\varphi_1}(s_1, \dots, s_l) = f^k_{\varphi_1}(t_1, \dots, t_l)$ für alle Skolemfunktionen φ_1 aus S .

(S^+2) $S^+ \vdash u=v$ und $S^+ \vdash v=w \Rightarrow S^+ \vdash u=w$.

(S^+3) $S^+ \vdash u=v \Rightarrow S^+ \vdash v=u$.

Die (S^+3)-Schlüsse vernachlässigen wir ebenso wie die (S5)-Schlüsse.

7.11 Länge einer Herleitung

Für eine Herleitung H in RS oder S^+ sei

$l(H) :=$ Anzahl der in H verwendeten Schlüsse
ohne (R4) (bzw. (S5)-) Schlüsse.

Wir schreiben $R \vdash_m u=v$, wenn es eine Herleitung H von $u = v$ mit $l(H) \leq m$ gibt.

7.12 Lemma

Für alle $l, m \in \mathbb{N}$ und alle Terme u, v aus S^+ gilt:

$S^+ \vdash_m u = v \Rightarrow S^+ \vdash_m f^1 u = f^1 v$.

Der Beweis wird durch Induktion nach der Länge m der Herleitung von $u = v$ geführt.

7.13 Satz

Für alle Terme $u, v \in T(S)$ gilt:

$$S \vdash u = v \iff S^+ \vdash u = v.$$

Beweis:

" $\Leftarrow$ ": Klar mit Herleitungsinduktion nach $(S^+O)-(S^+2)$.

" $\Rightarrow$ ": Beweis durch Herleitungsinduktion nach $(SO)-(S4)$:

1) $SO \vdash u = v$

Dann gilt $S^+O \vdash u = v$.

2) $S \vdash u' = v' \xRightarrow{(S1)} S \vdash u = v$:

Nach IV gilt $S^+ \vdash u' = v'$. Nach 7.8.5 erhält man durch Einschieben eines $(S1)$ -Schlusses hinter die Axiome aus der Herleitung H' von $u'=v'$ in S^+ eine Herleitung H von $u = v$. H ist offensichtlich auch aus S^+ .

3) Für $(S2)$ -Schlüsse folgt die Behauptung aus IV und 7.12.

Für $(S3)$ - und $(S4)$ -Schlüsse folgt die Behauptung aus IV.

§ 8 Entscheidbarkeit von R

8.1 Exponent, absolute Stellenzahl

1) Für jeden Term u sei

$$\exp(u) := p, \text{ falls } u \equiv f^p \varphi \vec{a} \text{ oder } u \equiv f^{p_{a_i}}.$$

Wir nennen $\exp(u)$ den Exponenten von u .

2) Für eine m -stellige Skolemfunktion φ und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$s(k, \varphi) := \begin{cases} s(k', \varphi) & \text{falls es } k' \in \mathbb{N}_0 \text{ und eine } m' \text{-} \\ & \text{stellige Skolemfunktion } \psi \text{ gibt} \\ & \text{mit } m' < m \text{ und } R \vdash f^k \varphi \vec{a} = f^{k'} \psi \vec{a}, \\ m & \text{sonst;} \end{cases}$$

$s(k, \varphi)$ heißt absolute Stellenzahl von $f^k \varphi \vec{a}$.

3) Sind $u_1 = v_1, \dots, u_r = v_r$ die nichttrivialen Axiome von R, so sei

$$N' := \max\{\exp(u) \mid \exists i (1 \leq i \leq r \text{ u. } (u \equiv u_i \text{ o. } u \equiv v_i))\},$$

$$N := (8r + 20) N'.$$

8.2 Lemma

Für alle $k, l, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und für alle Skolemfunktionen φ aus R gilt:

$$1) k \leq l \implies s(l, \varphi) \leq s(k, \varphi).$$

2) Ist $s(k, \varphi) < i$, dann ist für alle $u \in T(R)$

$$R \vdash f^{p_{a_i}} = f^k \varphi \vec{a} \implies R \vdash f^p u = f^k \varphi \vec{a}$$

ein zulässiger Schluß.

Beweis:

1) ist klar nach Definition von $s(-, -)$.

2) Wegen $s(k, \varphi) < i$ gibt es eine m' -stellige Skolemfunktion ψ und $k' \in \mathbb{N}_0$ mit $R \vdash f^k \varphi \vec{a} = f^{k'} \psi \vec{a}$ und $m' < i$.

Auf i und $f^{k'} \psi \vec{a}$ läßt sich ein (R1)-Schluß anwenden.

Mit zwei (R3)-Schlüssen folgt die Behauptung.

8.3 Lemma

- 1) In einer Herleitung H der Form 7.9.(+), in der kein (R2)-Schluß auftritt, gilt für alle vorkommenden Terme u:

$$\exp(u) \leq (l(H)+1)N'.$$

- 2) Sei $s \in U(R)$, $p \in \mathbb{N}_0$.

Sei $f^p s = v$ in R mit einer Herleitung der Form 7.9.(+) herleitbar und für jede Herleitung H von $f^p s = v$ der Form 7.9.(+) gelte $l(H) > 2r+1$.

Dann gibt es $a < b < N/2$ und eine Herleitung H' der Form 7.9.(+) von $f^a s = f^b s$, so daß gilt:

i) $l(H') \leq 4r + 5$.

- ii) Die Exponenten der in H' auftretenden Terme sind alle kleiner als $N/2$.

- 3) Ist in R ein (R1)-Schluß anwendbar, so gibt es $p, q \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $s \in U(R)$ gilt:

$$p < q < N \text{ und } R \vdash_{4r+10} f^p s = f^q s.$$

Die Exponenten der Terme dieser Herleitungen sind kleiner als N.

Beweis:

- 1) Ist $u=v$ aus $s_1=t_1$ und $s_2=t_2$ durch (R3)-Schluß hergeleitet, so gilt

$$\max \{ \exp(u), \exp(v) \} \leq \max \{ \exp(s_1), \exp(t_1) \} + \max \{ \exp(s_2), \exp(t_2) \}$$

In einer Herleitung H der Form 7.9.(+) ohne (R2)-Schlüsse sind die Prämissen des 1. (R3)-Schlusses und die rechten Prämissen der anderen (R3)-Schlüsse

Axiome, haben also Exponenten $\leq N'$.

Also bleiben die Exponenten der Terme $\leq (l(H)+1)N'$.

2) Sei H die kürzeste Herleitung, die die Voraussetzungen von 2) erfüllt. In H stehen mindestens $2r+1$ (R3)-Schlüsse. Jeder (R3)-Schluß enthält auf der rechten Seite ein nichttriviales Axiom. Also kommt mindestens ein Axiom an zwei Stellen $i < j \leq 2r+1$ mit den gleichen Schnittermen $v_{i0} \equiv v_{j0}$ vor. Also ist $v_{i0} \equiv v_{j0} \equiv f^a w$ und $v_{i1} \equiv v_{j1} \equiv f^b w'$ mit $a, b \in N_0$ wobei $w, w' \in U(R)$ sind.

Es gilt: $(c, d, e, g \in N_0)$

$$\begin{aligned} u_{i0} &= u_{i1} \quad \text{mit} \quad u_{i0} \equiv f^c s, & u_{i1} &\equiv f^d w; \\ u_{j0} &= u_{j1} \quad \text{mit} \quad u_{j0} \equiv f^e s, & u_{j1} &\equiv f^g w. \end{aligned}$$

1. Fall: $g \geq d \geq a$

Es folgt:

$$\left. \begin{aligned} R \vdash_{2r+1} f^c s = f^d w, \quad RO \vdash f^a w = f^b w' &\implies R \vdash_{2r+2} f^c s = f^{b+(d-a)} w' \\ (R3) \end{aligned} \right\} R \vdash_{4r+5} f^e s = f^{c+g-d} s$$

$$\left. \begin{aligned} R \vdash_{2r+1} f^e s = f^g w, \quad RO \vdash f^a w = f^b w' &\implies R \vdash_{2r+2} f^e s = f^{b+(g-a)} w' \\ (R3) \end{aligned} \right\}$$

Diese Herleitung läßt sich nach 7.9 in eine Herleitung H der Form 7.9(+) mit $l(H) \leq 4r+5$ umformen. Nach 8.3.1 sind die Exponenten der Terme von H kleiner gleich $(4r+6)N' < N/2$.

Angenommen es gelte $e = c+g-d$:

Dann kann wegen $g = d+g-d$ der erste (R3)-Schluß durch einen (R2)-Schluß ersetzt werden, der dann ganz an den Schluß der neuen Herleitung geschoben wird.

Also ist H nicht die kürzeste Herleitung von $f^p s = v$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit gilt $e \neq c + g - d$. In den anderen Fällen folgt die Behauptung analog.

3) Ist in R ein (R1)-Schluß anwendbar, so ist die Prämisse eines (R1)-Schlusses in R herleitbar.

Unter den herleitbaren Prämissen von (R1)-Schlüssen gibt es mindestens eine Prämisse $f^{p_i} a_i = v, p \in N_0, i \in \{1, \dots, n\}$, deren Herleitung H keinen (R1)-Schluß enthält.

Diese Herleitung läßt sich auf die Form 7.9(+) bringen.

1. Fall: Für alle Herleitungen H' der Form 7.9(+) von $f^{p_i} a_i = v$ gilt $l(H) > 2r + 1$

Aus 8.3.2 mit einem anschließenden (R1)-Schluß folgt die Behauptung.

2. Fall sonst

Dann gibt es eine Herleitung H' von $f^{p_i} a_i = v$ der Form 7.9(+) mit $l(H') \leq 2r+1$. In H' ist höchstens der letzte Schluß ein (R2)-Schluß. Die Prämisse dieses Schlusses hat auch die Gestalt $f^{p'_i} a_i = v'$ ($p' \in N_0$) einer Prämisse eines (R1)-Schlusses. Nach 8.3.1 sind die Exponenten der in dieser Herleitung auftretenden Terme kleiner als $N/2$, insbesondere ist $p' < N/2$.

Ist v' (bzw. v) $\equiv f^q a_l$ ($q \in N_0, l \in \{1, \dots, n\}$), so folgt die Behauptung aus einem weiteren (R1)-Schluß.

Ist v' (bzw. v) $\equiv f^q \varphi \vec{a}$ ($q \in N_0$), so folgt die Behauptung aus:

$$\left. \begin{array}{l} R \vdash_{2r+1} f^{p'_i} a_i = f^q \varphi \vec{a} \Rightarrow R \vdash_{2r+2} f^{p'+1} a_i = f^q \varphi \vec{a} \\ \quad \quad \quad (R1) \\ R \vdash_{2r+1} f^{p'_i} a_i = f^q \varphi \vec{a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \vdash_{4r+4} f^{p'+1} a_i = f^{p'_i} a_i \Rightarrow R \vdash_{4r+5} f^{p'+1} s = f^{p'_i} s \quad (R3)$$

Die Exponenten aller dieser Herleitungen sind kleiner als N.

8.4 Satz

Für alle $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $s, t \in U(R)$ gilt:

$$R \vdash f^p_s = f^q_t \iff$$

$$\exists p', q', r(1), r(2), r(3), r(4), k, l, l' \in \mathbb{N}_0$$

$$[r(1) < r(2) < N \text{ u. } r(3) < r(4) < N \text{ u. } p', q' < N$$

$$\text{u. } p = p' + l(r(2) - r(1)) + k \text{ u. } q = q' + l'(r(4) - r(3)) + k \text{ u.}$$

$$\text{u. } (k > 0 \implies l = l' = 0) \text{ u. } R \vdash f^{p'}_{s'} = f^{q'}_{t'} \text{ u.}$$

$$\text{u. } (R \vdash f^{r(1)}_s = f^{r(2)}_s \iff R \vdash f^{r(3)}_t = f^{r(4)}_t)] .$$

Beweis:

" $\Leftarrow$ ": klar.

" $\Rightarrow$ ": Sei $R \vdash f^p_s = f^q_t$.

1. Fall: $\exists a, b \in \mathbb{N}_0$ ($a \neq b$ und $R \vdash f^a_s = f^b_s$)

Also gilt: $\neg \exists a, b \in \mathbb{N}_0$ ($a \neq b$ und $R \vdash f^a_t = f^b_t$) und in R ist kein (R1)-Schluß anwendbar.

Es gibt somit eine Herleitung H der Form 7.9(+) von $f^p_s = f^q_t$, deren letzter Schluß folgende Gestalt hat: ($p', q' \in \mathbb{N}_0$)

$$R \vdash f^{p'}_{s'} = f^{q'}_{t'} \implies R \vdash f^p_s = f^q_t \quad .$$

(R2)

Nach 8.3.2 gilt o.B.d.A. $l(H) \leq 2r + 1$ und

nach 8.3.1 gilt $p!q' < N$.

Definiere $l := l' := r(1) := r(2) := 0, r(3) := r(4) := 1$.

2. Fall: Sonst

Ist in R ein (R1)-Schluß anwendbar, dann gibt es nach 8.3.3 $r(1) < r(2) < N$ und $r(3) < r(4) < N$ mit $R \vdash f^{r(1)}_s = f^{r(2)}_s$ und $R \vdash f^{r(3)}_t = f^{r(4)}_t$.

Ist in R kein (R1)-Schluß anwendbar, so gibt es Herleitungen der Form 7.9(+) von $f^a_s = f^b_s$ und $f^{a'}_{t'} = f^{b'}_{t'}$ mit $a, a', b, b' \in \mathbb{N}_0, a \neq b$ und $a' \neq b'$. Wir erhalten aus 8.3.2 $r(1) < r(2) < N$ und $r(3) < r(4) < N$ mit $R \vdash f^{r(1)}_s = f^{r(2)}_s$ und $R \vdash f^{r(3)}_t = f^{r(4)}_t$.

Also gibt es $p', q' < N$ und $l, l' \in \mathbb{N}_0$ mit
 $p = p' + l(r(2) - r(1))$ und $q = q' + l'(r(4) - r(3))$.
 Mit $k := 0$ und $(l+1')$ (R3)-Schlüssen folgt die Behauptung.

8.5 Satz

Für $p, q < N$ und $s, t \in U(R)$ ist entscheidbar, ob
 $R \vdash f^p_s = f^q_t$ gilt.

Beweis:

Durch Nachprüfen aller Herleitungen H in R mit
 $l(H) \leq 4r + 10$ und Exponenten kleiner als N läßt sich
 nach 8.3.3 feststellen, ob in R (R1)-Schlüsse anwendbar
 sind.

Falls dies nicht der Fall ist, läßt sich nach 8.3.2
 feststellen, ob es $a < b < N/2$ mit $R \vdash f^a_s = f^b_s$ gibt.

1. Fall: $\neg \exists a, b (a < b < N/2 \text{ und } R \vdash f^a_s = f^b_s)$

Dann ist (R1) nicht anwendbar.

Es ist $f^p_s = f^q_t$ ableitbar, wenn es eine Herleitung H
 mit $l(H) \leq 2r+1$ und Exponenten kleiner als N gibt (wegen
 7.9, 8.3.2 und 8.3.1).

2. Fall: $R \vdash f^a_s = f^b_s, a < b < N/2$ und (R1) ist nicht anwendbar

Da (R1) nicht anwendbar ist, können wir uns auf Herlei-
 tungen der Form 7.9(+) beschränken. Nach 8.3.2 können
 wir $R \vdash_{4r+5} f^a_s = f^b_s$ voraussetzen.

Für jedes $s' \in U(R)$, das in einer 7.9(+)-Herleitung von
 $f^p_s = f^q_t$ auftritt, gibt es $c, d \in \mathbb{N}_0$, so daß $f^c_s = f^d_{s'}$
 in einer Herleitung H von $f^p_s = f^q_t$ auftritt. O.B.d.A. ist
 die Herleitung von $f^c_s = f^d_{s'}$ eine Folge von (R3)-Schlüs-
 sen mit den Axiomen $A_1, \dots, A_k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) als rechten Prämis-
 sen. Mehrfach auftretende Axiome lassen sich eliminieren:
 Nach dem ersten Auftreten A_1 eines Axioms A streicht man

alle Axiome $A_{i+1}, \dots, A_1$ ($i < l \leq k$) bis einschließlich des letzten Auftretens A_1 von A .

Dadurch erhält man eine Herleitung H' mit $l(H') \leq 2r$ von $f^{c'}s = f^{d'}s'$ für gewisse $c', d' \leq (2r+1)$ $N' \leq N/2$.

Wir schließen:

$$R \vdash_{4r+5} f^a s = f^b s \Rightarrow R \vdash_{4r+6} f^{c'+a} s = f^{c'+b} s; \quad (R2)$$

$$\left. \begin{array}{l} R \vdash_{2r} f^{d'} s' = f^{c'} s \\ R \vdash_{4r+6} f^{c'+a} s = f^{c'+b} s \end{array} \right\} \Rightarrow R \vdash_{6r+7} f^{d'+a} s' = f^{c'+b} s \quad (R3)$$

$$\left. \begin{array}{l} R \vdash_{6r+7} f^{d'+a} s' = f^{c'+b} s \\ R \vdash_{2r} f^{c'} s' = f^{d'} s' \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (R3)$$

$$\Rightarrow R \vdash_{8r+9} f^{d'+a} s' = f^{d'+b} s' \Rightarrow R \vdash_{8r+10} f^{N-b+a} s' = f^N s' \quad (R2)$$

Nach 7.9 gibt es eine 7.9(+)-Herleitung H von

$f^{N-b+a} s' = f^N s'$ mit $l(H) \leq 8r+10$ und wegen 8.3.1 mit Exponenten $\leq (8r+11)N' < N$.

Sei $C := \{s' \in U(R) \mid \text{es gibt eine 7.9(+)-Herleitung } H \text{ von } f^{N-b+a} s' = f^N s' \text{ mit } l(H) \leq 8r+10 \text{ und Exponenten } < N\}$.
Für $s' \in U(R)$ ist entscheidbar, ob $s' \in C$ gilt.

Zur Herleitbarkeit von $f^p s = f^q t$ genügt es, Herleitungen zu betrachten, in denen alle $s' \in U(R)$ auch aus C sind.

Für $s' \in C$ sei

$$\|k\| := \begin{cases} \|k-b+a\| & \text{falls } k \geq N; \\ k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $u, v, w \in C$, $k, l, m, p, q \leq N$ definieren wir die Restklassenschlüsse:

$$(R2 \parallel \cdot \parallel) \quad R \vdash f^p u = f^q v \Rightarrow R \vdash f^{\parallel p+k \parallel} u = f^{\parallel q+k \parallel} v ;$$

$$(R3 \parallel \cdot \parallel) \quad \left\{ \begin{array}{l} (R \vdash f^p u = f^q v \text{ u. } R \vdash f^l v = f^m w \text{ u. } q = \parallel l+k \parallel) \Rightarrow \\ \Rightarrow R \vdash f^{\parallel p \parallel} u = f^{\parallel m+k \parallel} w \end{array} \right.$$

Da $U(R)$ endlich ist, sind das nur endlich viele Schlüsse.

$R \vdash f^p s = f^q t$ gilt genau dann, wenn $f^p s = f^q t$ mit einer 7.9(+)-Herleitung, die anstelle von (R2) und (R3) $(R2 \parallel \cdot \parallel)$

und $(R3 \parallel \cdot \parallel)$ verwendet, ableitbar ist. Aus dieser Herleitung können wir mehrfach auftretende $(R3 \parallel \cdot \parallel)$ -Schlüsse eliminieren.

Denn da die Herleitung aus einer Folge von $(R3 \parallel \cdot \parallel)$ -Schlüssen besteht, bleibt die Herleitung richtig, wenn man alle Schlüsse nach dem 1. Auftreten eines $(R3 \parallel \cdot \parallel)$ -Schlusses bis einschließlich des letzten Auftretens dieses $(R3 \parallel \cdot \parallel)$ -Schlusses streicht.

Damit genügt es, endlich viele Herleitungen zu betrachten.

3. Fall: Sonst

Dann gibt es nach 8.3.3 $a < b < N$ mit

$R \vdash f^a s' = f^b s'$ für alle $s' \in U(R)$.

Wir betrachten somit wie im 2. Fall die Abbildung $\parallel \cdot \parallel$ bzgl. a, b und können uns auf die Restklassenschlüsse $(R2 \parallel \cdot \parallel)$, $(R3 \parallel \cdot \parallel)$ und den analog definierten Schluß $(R1 \parallel \cdot \parallel)$ beschränken.

Elimination der $(R1 \parallel \cdot \parallel)$ -Schlüsse:

3.1) Definiere $(R'O) := (RO)$, $r'(O) := r$ und fahre mit 3.2.0 fort.

3.2.j) Betrachte alle Herleitungen H mit $l(H) \leq 4r'(i)+10$, die nur aus $(R'j)-$, $(R2 \parallel \cdot \parallel)$ - und $(R3 \parallel \cdot \parallel)$ -Schlüssen bestehen.

- a) Ist mit diesen Herleitungen die Prämisse $u=v$ eines $(R1 \parallel \cdot \parallel)$ -Schlusses ableitbar, die nicht in $(R'j)$ auftritt, so definiere $(R'(j+1)) := (R'j) \cup F$, $r'(j+1) := r'(j) + \text{Anzahl der Elemente von } F$, und fahre mit 3.2(j+1) fort. Dabei sei F die (endliche) Menge aller Konklusionen von $(R1 \parallel \cdot \parallel)$ -Schlüssen mit Prämisse $u=v$.
- b) Sonst breche das Verfahren ab.

Da es nur endlich viele Prämissen von $(R1 \parallel \cdot \parallel)$ geben kann, terminiert das Verfahren mit einem $j(O) \in \mathbb{N}_0$.

Wegen 8.3.3 gehören nach Beendigung des Verfahrens alle in R ableitbaren Konklusionen von $(R1 \parallel \cdot \parallel)$ -Schlüssen zu den Axiomen $(R'j(0))$.

Es gilt damit:

$R \vdash f^p s = f^q t \iff f^{\parallel p \parallel} s = f^{\parallel q \parallel} t$ ist mit einer 7.9(+)-Herleitung, die nur $(R'j(0))$, $(R2 \parallel \cdot \parallel)$ und $(R3 \parallel \cdot \parallel)$ verwendet, ableitbar.

Wie im 2. Fall erhalten wir damit die Behauptung.

8.6 Satz

- 1) Für $p, q \in \mathbb{N}_0$ und $s, t \in U(R)$ ist entscheidbar, ob $R \vdash f^p s = f^q t$ gilt.
- 2) Für $p \in \mathbb{N}_0$ und $s, t \in U(R)$ ist entscheidbar, ob und welche $q \in \mathbb{N}_0$ es gibt, für die $R \vdash f^p s = f^q t$ gilt.
- 3) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und Skolemfunktionen φ aus R ist $s(k, \varphi)$ berechenbar.

Beweis:

1) folgt sofort aus 8.4 und 8.5.

2) Seien p, s, t gegeben.

Prüfe nach, für welche $a, b \in \{0, \dots, N-1\}$

$R \vdash f^a s = f^b t$ gilt und für welche $c < d < N$

$R \vdash f^c s = f^d s$ gilt.

1. Fall: Es gibt keine solche a, b

Dann gibt es nach 8.4 auch kein q mit $R \vdash f^p s = f^q t$.

2. Fall: Es gibt derartige a, b, aber keine c, d

Wegen 8.4 gilt $R \vdash f^p s = f^q t$ genau dann, wenn es $a', b' < N$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $p = a' + k$, $q = b' + k$ und $R \vdash f^{a'} s = f^{b'} t$.

Wegen der Voraussetzung des 2. Falles gibt es höchstens ein einziges solches q .

3. Fall: Es gibt derartige a, b und c, d

Nach 8.4 gibt es ebenfalls $c' < d' < N$ mit

$$R \vdash f^{c'} t = f^{d'} t.$$

Also gilt:

$$R \vdash f^p s = f^q t \iff$$

$$p = a + l(d - c) + k \text{ u. } q = b + l'(d' - c') + k \text{ u. } c < d < N \text{ u. } c' < d' < N \text{ u.}$$

$$\text{u. } a, b < N \text{ u. } R \vdash f^a s = f^b t \text{ u. } R \vdash f^c s = f^d s \text{ u. } R \vdash f^{c'} t = f^{d'} t.$$

Da an l' keine Bedingung gestellt ist, gilt $R \vdash f^p s = f^q t$.
für unendlich viele q .

3) folgt sofort aus 2.

§ 9 Beziehungen zwischen R und S

9.1 Bemerkung

Sei $u \equiv f^p \varphi \vec{a} \in T(S)$. Genau einer der folgenden $n+2$ Fälle trifft zu: ($i=1, \dots, n$)

(p, φ , 1) Es gibt ein $c \in N_0$ und $i > s(p, \varphi)$ mit

$$R \vdash f^c a_i = f^p \varphi \vec{a}.$$

(p, φ , 2, i) Es gibt $c \in N_0$ mit $R \vdash f^c a_i = f^p \varphi \vec{a}$ und $i \leq s(p, \varphi)$.

(p, φ , 3) Es gibt kein $c \in N_0$ und kein $i \in \mathbb{N}$ mit $R \vdash f^c a_i = f^p \varphi \vec{a}$.

Zum Beweis: Wenn es $i+j$ gibt mit $R \vdash f^c a_i = f^p \varphi \vec{a}$ und $R \vdash f^d a_j = f^p \varphi \vec{a}$, dann ist $s(p, \varphi) = 0$ wegen der Existenz einer 0-stelligen Skolem-funktion.

9.2 Voraussetzung

a) $S \not\vdash a = f^q b$ für alle $q \in N_0$ und freie Variablen a, b mit $a \neq b$.

b) $S \not\vdash a_i = f^p \varphi \vec{a}$, falls $s(p, \varphi) < i$ gilt.

9.3 Bemerkung

Die Voraussetzung 9.3 fordert nur, daß die Modelle von S nicht genau einelementige Mengen sind.

9.4 Definition des zu u gehörigen normalen bzw. schwach normalen Terms

Zu jedem Term u definieren wir zugehörige Terme $|u|$ und $\tilde{u}$:

1) $\tilde{u}$:

1.1 $u \equiv f^p a$, $p \in \mathbb{N}_0$:

$\tilde{u} := f^{q_0} a$, wobei $q_0 := \min \{q' \mid R \vdash f^p a = f^{q'} a\}$ ist.

1.2 $u \equiv f^p \varphi \vec{s}$, $p \in \mathbb{N}_0$, φ m-stellig:

$$\tilde{u} := \begin{cases} f^{q_1} a_1 & \text{falls } (p, \varphi, 1) \text{ zutrifft;} \\ f^{q_2} s_1 & \text{falls } (p, \varphi, 2, 1) \text{ zutrifft;} \\ f^{q_3} \varphi \vec{b}_0 & \text{falls } (p, \varphi, 3) \text{ zutrifft.} \end{cases}$$

Dabei sind:

$$q_1 := \min \{q' \mid \exists i (R \vdash f^p \varphi \vec{a} = f^{q'} a_i)\},$$

$$q_2 := \min \{q' \mid R \vdash f^p \varphi \vec{a} = f^{q'} a_1\},$$

$$q_3 := \min \{q' \mid R \vdash f^p \varphi \vec{a} = f^{q'} \varphi \vec{a}\},$$

$$\vec{b}_0 := (b_{01}, \dots, b_{0m}) \text{ mit } (i=1, \dots, m)$$

$$b_{0i} := \begin{cases} \tilde{s}_i & \text{falls } i \leq s(p, \varphi), \\ a_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

2) $|u|$:

2.1 $u \equiv f^p a$, $p \in \mathbb{N}_0$: $|u| := u$.

2.2 $u \equiv f^p \varphi \vec{s}$, φ m-stellig, $p \in \mathbb{N}_0$:

$$|u| := \begin{cases} f^p \varphi \vec{a} & \text{falls } (p, \varphi, 1) \text{ zutrifft oder falls} \\ & (p, \varphi, 2, 1) \text{ zutrifft mit } s_1 \equiv a_1; \\ |f^{q_1} s_i| & \text{falls } (p, \varphi, 2, i) \text{ zutrifft mit } s_i \not\equiv a_i \\ & \text{und } R \vdash f^p \varphi \vec{a} = f^{q_1} a_i \text{ gilt;} \\ f^p \varphi \vec{b}_0 & \text{falls } (p, \varphi, 3) \text{ zutrifft.} \end{cases}$$

3) u heißt normal, falls $u \equiv \tilde{u}$ gilt.

9.5 Lemma

Für alle $u \in T(S)$ gilt:

a) $S \vdash u = \tilde{u}$, $S \vdash u = |u|$, $(S \vdash u = v \Rightarrow S \vdash \tilde{u} = \tilde{v})$,

b) $\tilde{u} \equiv f^1 a$ für $1 \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow |u|$ ist schwach normal
und $R \vdash |u| = \tilde{u}$.

c) Sei $|u|$ schwach normal und $R \vdash |u| = f^1 a$ für $1 \in \mathbb{N}_0$

Dann gilt:

- 1) $\tilde{u} \equiv f^{1'} b$ für ein $1' \in \mathbb{N}_0$ und eine Objektvariable b ;
- 2) $1 = 0 \implies (1' = 0 \text{ und } a \equiv b)$.

Beweis:

a) folgt aus der Definition von $|u|$ und $\tilde{u}$.

b)c) Beweis durch Induktion nach der Anzahl der Skolem-funktionen in u und durch Fallunterscheidung nach der Gestalt von u .

9.6 Satz

Sei $S \vdash u=v$ und $|u|$ schwach normal.

Dann gibt es ein schwach normales $|v|$ mit

$R \vdash |u| = |v|$.

Beweis:

Wir machen eine Herleitungsinduktion bzgl. S^+ und eine Nebeninduktion nach der Anzahl der Skolemfunktionen in u . Außerdem machen wir beim Induktionsanfang (S^+0) eine Fallunterscheidung nach der Gestalt von u und v und der Gestalt der möglichen Herleitungen von $u = v$.

Nach Lemma 7.8.4-5 können wir uns auf Herleitungen (S^+0) $\equiv$ (S0)-(S2) beschränken, in denen nach dem Axiom höchstens ein (S1)-Schluß vorkommt.

Seien $c, d, e, g, h, p, q \in \mathbb{N}_0, i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\vec{s}, \vec{t} \in T(S)^n$.

1) (S^+0) $\vdash u=v$, d.h. (S0)-(S2) $\vdash u=v$

I) $u \equiv f^p a$

Hat v die Gestalt $f^q b$, so ist die Herleitung in S auch eine Herleitung in R und es gilt: $u \equiv |u|, v \equiv |v|$.

Hat v die Gestalt $f^q \varphi \vec{a}$, so verläuft der Beweis ganz ähnlich dem Beweis von 1.II.

II) $u \equiv f^p \varphi \vec{s}, v \equiv f^q a$

Es ist $|v| \equiv v \equiv f^q a$.

H1: (SO) $f^c a_i = f^d a_j \xRightarrow{(S1)} f^{c+e} \varphi \vec{s} = f^{d+g} a \xRightarrow{(S2)} u=v$

Es ist $s(p, \varphi) = 0$, also $|u| \equiv f^p \varphi \vec{a}$ und aus dem Axiom (SO) = (R) folgt mit (R1) : $R \vdash |u| = |v|$.

H2: (SO) $f^c \varphi \vec{a} = f^d a_i \xRightarrow{(S1)} f^c \varphi \vec{s} = f^{d+g} a \xRightarrow{(S2)} f^p \varphi \vec{s} = f^q a$

H2a: 1) $s(p, \varphi) < i$ oder 2) $(s(p, \varphi) \geq i \text{ und } s_1 \equiv a_i)$

Es ist $|u| \equiv f^p \varphi \vec{a}$ und im Fall 2) $f^g a \equiv a_i$.

$R \vdash |u| = |v|$ folgt aus (SO)=(R), einem (R2)-Schluß und im Fall 1 außerdem aus Lemma 8.2.2).

H2b: $s(p, \varphi) \geq i$ und $s_1 \neq a_i$

Es ist $s_1 \equiv f^g a$ und damit $|u| \equiv |f^h s_1| \equiv f^{h+g} a$ für ein h mit $R \vdash f^p \varphi \vec{a} = f^h a_i$. Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} (R) f^c \varphi \vec{a} = f^d a_i \xRightarrow{(R2)} f^p \varphi \vec{a} = f^{q-g} a_i \\ (R) f^p \varphi \vec{a} = f^h a_i \end{array} \right\} f^h a_i = f^{q-g} a_i \xRightarrow{(R1)} f^{h+g} a = f^q a.$$

III) $u \equiv f^p \varphi \vec{s}, v \equiv f^q \psi \vec{t}, \varphi$ m-stellig, ψ k-stellig

H1: (SO) $f^c a_i = f^d a_j \xRightarrow{(S1)} f^{c+e} \varphi \vec{s} = f^{d+g} \psi \vec{t} \xRightarrow{(S2)} u=v$

Entweder ist $i \neq j$ und $s(p, \varphi) = s(q, \psi) = 0$, d.h.

$R \vdash f^p \varphi \vec{a} \equiv |u| = |v| \equiv f^q \psi \vec{a}$ folgt aus (R) und (R1)

oder es gilt $i = j$, $\varphi = \psi$ und $e = g$. Dann kann man $|v| := |u|$ wählen oder $R \vdash |u| = |v|$ folgt aus (R) und (R1).

H2: (SO) $f^c \varphi \vec{a} = f^d a_i \xRightarrow{(S1)} f^{c+e} \varphi \vec{s} = f^{d+g} \psi \vec{t} \xRightarrow{(S2)} u=v$

H2a: $s(p, \varphi) < i$

Es ist $|u| \equiv f^p \varphi \vec{a}$ und es ist ableitbar:

$(R) f^c \varphi \vec{a} = f^d a_i \xRightarrow{(R2)} f^p \varphi \vec{a} = f^{q-g} a_i \xRightarrow{8.2.2} f^p \varphi \vec{a} = f^q \psi \vec{a}$

Wegen $R \vdash f^p \varphi \vec{a} = f^q \psi \vec{a}$ ist $s(q, \psi) < i$ und $|v| \equiv f^q \psi \vec{a}$.

H2b: $s(p, \varphi) \geq 1$ und $s_1 \equiv a_1$

Es ist $v \equiv f^q a_1$ im Widerspruch zur Gestalt von v .

H2c: $s(p, \varphi) \geq 1$ und $s_1 \not\equiv a_1$

Es ist $|u| \equiv |f^h s_1|$ für ein h mit $R \vdash f^p \varphi \vec{a} = f^h a_1$.

s_1 hat die Gestalt $f^g \psi \vec{t}$. Wegen $R \vdash f^p \varphi \vec{a} = f^{q-g} a_1$ gilt $R \vdash f^h a_1 = f^{q-g} a_1$ und somit folgt aus (S0) und (S1):

$S \vdash f^h f^g \psi \vec{t} = f^q \psi \vec{t}$. Nach NIV gibt es $|v|$ mit

$R \vdash |f^{h+g} \psi \vec{t}| = |v|$, d.h. $R \vdash |u| = |v|$.

H3: (S0) $f^c a_1 = f^d \psi \vec{a} \xRightarrow{(S1)} f^{c+e} \psi \vec{s} = f^d \psi \vec{t} \xRightarrow{(S2)} u = v$

Dieser Fall wird analog III H2 bewiesen.

H4: (S0) $f^c \varphi \vec{a} = f^d \psi \vec{a} \xRightarrow{(S1)} f^c \varphi \vec{s} = f^d \psi \vec{t} \xRightarrow{(S2)} u = v$

O.B.d.A sei $m \leq k$, d.h. $s_1 \equiv t_1, \dots, s_m \equiv t_m$.

H4a: $s(p, \varphi) = 0$

Es ist $s(q, \psi) = 0$, $|u| \equiv f^p \varphi \vec{a}$, $|v| \equiv f^q \psi \vec{a}$ und $R \vdash |u| = |v|$ folgt aus (S0) = (R) und (R2).

H4b: $(p, \varphi, 2, 1)$ trifft zu mit $R \vdash f^h a_1 = f^p \varphi \vec{a}$

Ebenso gilt $R \vdash f^h a_1 = f^q \psi \vec{a}$.

Ist $s_1 \equiv t_1 \not\equiv a_1$, so ist o.B.d.A. $|u| \equiv |f^h s_1|$ und man

kann $|v| \equiv |u|$ wählen. Ist $s_1 \equiv t_1 \equiv a_1$, dann gilt

$|u| = f^p \varphi \vec{a}$ und $|v| \equiv f^q \psi \vec{a}$.

H4c: $(p, \varphi, 3)$ trifft zu

Dann trifft auch $(q, \psi, 3)$ zu. Sei $l := s(p, \varphi) = s(q, \psi)$.

Es ist $|u| \equiv f^p \varphi (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_l, a_{(l+1)}, \dots, a_m)$ und

$|v| \equiv f^q \psi (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_l, a_{(l+1)}, \dots, a_k)$. Wegen $|u|$ schwach

normal gilt $\tilde{s}_i \equiv a_1$ für $i=1, \dots, l$, also $|u| \equiv f^p \vec{a}$ und

$|v| \equiv f^q \psi \vec{a}$.

$$\underline{2) \ S^+ \vdash s_1 = t_1, \dots, S^+ \vdash s_m = t_m \implies S^+ \vdash f^p \varphi \vec{s} = f^p \varphi \vec{t}}_{(S^+)} \quad$$

1. Fall: $s(p, \varphi) = 0$ Dann ist $|u| \equiv f^p \varphi \vec{a} \equiv |v|$.

2. Fall: $(p, \varphi, 2, i)$ trifft zu mit $R \vdash f^h a_i = f^p \varphi \vec{a}$ und $s_i \equiv a_i$

Es ist $|u| \equiv f^p \varphi \vec{a}$.

a) Falls $t_i \equiv a_i$ gilt, ist $|v| \equiv f^p \varphi \vec{a} \equiv |u|$.

b) Falls $t_i \not\equiv a_i$ gilt, sei $|v| := |f^h t_i|$.

Wegen $S^+ \vdash_m a_i = t_i$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Lemma 7.12.

$S^+ \vdash_m f^h a_i = f^h t_i$; also gibt es nach I.V. ein $|f^h t_i|$

schwach normal mit $R \vdash f^h a_i = |f^h t_i|$. Wegen $R \vdash f^h a_i = |u|$ gilt auch $R \vdash |u| = |v|$.

3. Fall: $(p, \varphi, 2, i)$ trifft zu mit $R \vdash f^h a_i = f^p \varphi \vec{a}$ und $s_i \not\equiv a_i$

Es ist o.B.d.A. $|u| \equiv |f^h s_i|$.

a) $t_i \equiv a_i$:

Dann ist $|v| \equiv f^p \varphi \vec{a}$ schwach normal und wir erhalten die Behauptung analog 2.2 Fall b.

b) $t_i \not\equiv a_i$:

Sei $|v| := |f^h t_i|$. Wegen $S^+ \vdash_m s_i = t_i$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

nach 7.12 $S^+ \vdash_m f^h s_i = f^h t_i$. Wegen $|u| \equiv |f^h s_i|$ schwach normal folgt nach I.V., daß es ein schwach normales $|f^h t_i| \equiv |v|$ gibt mit $R \vdash |u| = |v|$.

4. Fall $(p, \varphi, 3)$ trifft zu

Sei $l := s(p, \varphi) = s(q, \psi)$.

Es ist $|u| \equiv f^p \varphi (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_l, a_{(l+1)}, \dots, a_m)$,

$|v| \equiv f^p \varphi (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_l, a_{(l+1)}, \dots, a_m)$. Da $|u|$ schwach

normal ist, gilt für $i=1, \dots, l$ $\tilde{s}_i \equiv a_i$ und somit nach 9.5.b: $|s_i|$ ist schwach normal und $R \vdash |s_i| = a_i$. Nach IV. gibt es schwach normale $|t_i|$ mit $R \vdash |s_i| = |t_i|$. Also gilt $R \vdash |t_i| = a_i$. Nach 9.5.c folgt $\tilde{t}_i \equiv a_i$, d.h. $|v| \equiv f^P \varphi \vec{a} \equiv |u|$.

$$3) \frac{S^+ \vdash u=w, S^+ \vdash w=v}{(S^+2)} \Rightarrow \frac{S^+ \vdash u = v}{(S^+2)}$$

Nach I.V. gibt es zu $|u|$ ein schwach normales $|w|$ mit $R \vdash |u| = |w|$. Zu diesem $|w|$ gibt es nach I.V. ein schwach normales $|v|$ mit $R \vdash |w| = |v|$. Für dieses $|v|$ gilt die Behauptung.

9.7 Folgerung

In den Definitionen von $s(k, \varphi)$, $|u|$, $\tilde{u}$ kann $R \vdash$ durch $S \vdash$ ersetzt werden.

Es ist entscheidbar, ob eine Gleichung zwischen schwach normalen Termen in S ableitbar ist.

§ 10 Eigenschaften normaler Terme

10.1 Lemma

Für $u, v \in T(S)$ sei $S \vdash u=v$. Dann gilt für

$l, l', p, q \in \mathbb{N}_0$:

- 1) $\tilde{u}$ hat die Gestalt $f^l a$ genau dann wenn $\tilde{v}$ die Gestalt $f^{l'} b$ hat.
- 2) Falls $\tilde{u} \equiv f^p \psi \tilde{s}$ und $\tilde{v} \equiv f^q \psi \tilde{t}$ ist, dann gilt $R \vdash f^p \psi \tilde{a} = f^q \psi \tilde{a}$ und $S \vdash s_i = t_i$ für $i=1, \dots, s(p, \psi) = s(q, \psi)$.

Beweis:

Zu 1):

Sei $\tilde{u} \equiv f^l a$. Nach 9.5.b ist $|u|$ schwach normal und es gilt $R \vdash |u| = \tilde{u}$. Nach 9.6 gibt es ein schwach normales $|v|$ mit $R \vdash |u| = |v|$, also $R \vdash \tilde{u} = |v|$. Da $\tilde{u}$ die Gestalt $f^l a$ hat, ist nach 9.5c $\tilde{v} \equiv f^{l'} b$ mit $R \vdash f^l a = f^{l'} b$. Es gilt: $l = \min \{q' | R \vdash f^l a = f^{q'} a\} = \min \{q' | R \vdash f^{l'} b = f^{q'} b\} = l'$.

Zu 2): Beweis durch Induktion nach der Länge der Herleitung in S^+ .

Wegen der Gestalt von $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ hat u die Form $f^{p'} \chi \tilde{s}'$ und v die Form $f^{q'} \omega \tilde{t}'$ mit $p', q' \in \mathbb{N}_0$ und $\tilde{s}', \tilde{t}' \in T(S)^n$.

1) $S^+ \vdash u=v$ d.h. $(S0)-(S2) \vdash u=v$.

Nach 7.8.4-5 können wir uns auf Herleitungen beschränken, in denen nach dem Axiom höchstens ein (S1)-Schluß vorkommt. Bis auf die folgende Herleitung H ergeben die Herleitungen entweder $\tilde{u} \equiv \tilde{v}$ oder: $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ haben nicht die gewünschte Gestalt. Seien $c, d \in \mathbb{N}_0$:

$$\text{H: } \begin{array}{ccc} (S0) & f^c \chi \tilde{a} = f^d \omega \tilde{a} & \Rightarrow f^c \chi \tilde{s}' = f^d \omega \tilde{t}' \Rightarrow u=v \\ & (S1) & (S2) \end{array}$$

Es gilt $s_i \equiv t_i$ für $i=1, \dots, s(p', \chi) = s(q', \omega)$.

Ha): $s(p', \chi) = 0$:

Für ein $l' \in \mathbb{N}_0$ gilt $\tilde{u} \equiv f^{l'} a_1$ und $\tilde{v} \equiv f^{l'} b$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Hb): $(p, \chi, 2, 1)$ trifft zu für ein minimales $h \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\frac{R \vdash f^h a_1}{R \vdash f^{p'} \chi \vec{a}}$$

Wegen $1 \leq s(p', \chi) = s(q', \omega)$ ist $s_1 \equiv t_1$ und $\tilde{v} \equiv \tilde{u} \equiv f^h s_1$.

Hc): $(p', \chi, 3)$ trifft zu

Sei $1 := s(p', \chi)$. Es gibt $\hat{p}, \hat{q} \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\equiv f^{\hat{p}} \chi(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_1, a_{(1+1)}, \dots, a_m), \\ \tilde{v} &\equiv f^{\hat{q}} \omega(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_1, a_{(1+1)}, \dots, a_k), \\ R \vdash f^{\hat{p}} \chi \vec{a} &= f^{p'} \chi \vec{a} \text{ und } R \vdash f^{\hat{q}} \omega \vec{a} = f^{q'} \omega \vec{a}. \end{aligned}$$

Somit gilt auch $R \vdash f^{\hat{p}} \chi \vec{a} = f^{\hat{q}} \omega \vec{a}$.

$$\frac{2) \ S^+ \vdash s_1 = t_1, \dots, S^+ \vdash s_m = t_m}{(S^+)} \Rightarrow f^{p'} \chi \vec{s} = f^{p'} \chi \vec{t}$$

1. Fall: $s(p', \chi) = 0$

Dann ist $\tilde{u} \equiv f^1 a_1 \equiv \tilde{v}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Fall: $(p', \chi, 2, 1)$ trifft zu für ein minimales h mit

$$\frac{R \vdash f^h a_1}{R \vdash f^{p'} \chi \vec{a}}$$

Also ist $\tilde{u} \equiv f^h s_1$ und $\tilde{v} \equiv f^h t_1$. Nach 7.12 sind

$f^h s_1 = f^h t_1$ und $s_1 = t_1$ mit Herleitungen gleicher Länge ableitbar. Also folgt die Behauptung aus der I.V.

3. Fall: sonst

Sei $1 := s(p', \chi)$. Es ist für ein $\hat{p} \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\equiv f^{\hat{p}} \chi(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_1, a_{(1+1)}, \dots, a_m). \\ \tilde{v} &\equiv f^{\hat{p}} \chi(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_1, a_{(1+1)}, \dots, a_m). \end{aligned}$$

Für $i=1, \dots, l$ gilt $S^+ \vdash s_i = t_i$, also auch $S^+ \vdash \tilde{s}_i = \tilde{t}_i$.

$$\frac{3) \quad S^+ \vdash u=w, \quad S^+ \vdash w=v}{(S^+2)} \Rightarrow \frac{S^+ \vdash u=v}{(S^+2)}$$

Wegen $\tilde{u} \equiv f^p \varphi \vec{s}$ hat nach 10.1.1 auch $\tilde{w}$ und damit auch $\tilde{v}$ eine Gestalt $f^1 \varphi \vec{t}$. Nach I.V. gilt die Behauptung für $u = w$ und für $w = v$. Aus mehreren (S^+2) - und $(R3)$ -Schlüssen folgt die Behauptung.

10.2 Abhängigkeit zweier Terme

$u \in T(S)$ hängt von $t \in T(S)$ ab, wenn es $f^p \varphi \vec{s} \in T(S)$ gibt, so daß gilt:

- 1) $S \vdash u = f^p \varphi \vec{s}$ und $(p, \varphi, 3)$ trifft zu.
- 2) Es gibt $i \in s(p, \varphi)$, so daß $S \vdash s_i = t$ gilt oder daß s_i von t abhängt.

10.3 Folgerung

- 1) Seien $u \equiv f^p \varphi \vec{s}$, $v \equiv f^q \varphi \vec{t} \in T(S)$. $(p, \varphi, 3)$ und $(q, \varphi, 3)$ treffen zu. Dann gilt:
 $S \vdash u=v \iff R \vdash f^p \varphi \vec{a} = f^q \varphi \vec{a}$ und für
 $i=1, \dots, s(p, \varphi)$ gilt $S \vdash s_i = t_i$.
- 2) Falls $f^k u \in T(S)$, $k \in \mathbb{N}_0$, von $t \in T(S)$ abhängt, so hängt für alle $l \in \mathbb{N}_0$ $f^l u$ von t ab.

Beweis:

Zu 1)

" $\Leftarrow$ " klar.

" $\Rightarrow$ " Sei $l := s(p, \varphi) = s(q, \varphi)$. Nach Voraussetzung gibt es $\hat{p} \leq p$, $\hat{q} \leq q$ mit $\tilde{u} \equiv f^{\hat{p}} \varphi (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_1, a_{(l+1)}, \dots, a_m)$,
 $\tilde{v} \equiv f^{\hat{q}} \varphi (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_1, a_{(l+1)}, \dots, a_k)$ und

$R \vdash f^{\hat{p}} \varphi \vec{a} = f^p \varphi \vec{a}$, $R \vdash f^{\hat{q}} \varphi \vec{a} = f^q \varphi \vec{a}$. Nach 10.1.2 gilt
 $R \vdash f^{\hat{p}} \varphi \vec{a} = f^{\hat{q}} \varphi \vec{a}$ und für $i=1, \dots, l$ $S \vdash s_i = t_i$.

Wegen $S \vdash s_i = \tilde{s}_i$ und $S \vdash t_i = \tilde{t}_i$ folgt daraus die Behauptung.

Zu 2)

Da $f^k u$ von t abhängt, gibt es $f^p \psi \vec{s} \in T(S)$ und $i \leq s(p, \psi)$, so daß $S \vdash f^k u = f^p \psi \vec{s}$ und $(p, \psi, 3)$ zutreffen und daß s_i von t abhängt oder $S \vdash t = s_i$ gilt.

Nach 10.1.1 hat $f^k u$ die Gestalt $f^q \psi \vec{s}'$ und jedes $f^l u$ bzw. $f^l u$ mit $1 \leq k$ hat nach Definition 9.5 die Gestalt $w \equiv \phi(f^{q'} \psi \vec{s}')$, wobei w von $f^{q'} \psi \vec{s}'$ abhängt ($q' \leq q \in N_0$, $\vec{s}' \in T(S)^n$).

Nach 10.1.2 gilt $R \vdash f^q \psi \vec{a} = f^p \psi \vec{a}$ und für $j=1, \dots, s(p, \psi)$ $S \vdash s_j = s'_j$. Also hängt $f^l u$ von t ab.

10.4 Satz

Sei $v \equiv f^q \psi(\vec{s}, \phi(u), \vec{t}) \in T(S)$ normal.

Hängt v von u ab, so ist $f^p u = v$

für keinen Term $u \in T(S)$ und kein $p \in N_0$ in S ableitbar.

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen es gebe so einen Term u' . Sei u ein Term mit der geringsten Anzahl an Skolemfunktionen, zu dem es $p \in N_0$ und $v \in T(S)$ gibt, die den Satz erfüllen. u ist normal, da v normal ist und von u abhängt.

1. Fall: $u \equiv f^{p'} a_1$, $p' \in N_0$

Dann ist $\tilde{u} \equiv f^1 a$ mit $1 \in N_0$.

Nach 10.1.1 ist $S \vdash f^1 a = v$ unmöglich und damit gilt auch $S \not\vdash f^p a = v$.

2. Fall: $u \equiv f^{p'} \omega \vec{z}$, $p' \in N_0$, $\vec{z} \in T(S)^n$

2.1) $s(p+p', \omega) = 0$

Dann gilt $f^p u = f^{1'} a$ für ein $1' \in N_0$ und $S \vdash f^{1'} a_1 = v$ im Widerspruch zu 10.1.1.

2.2) $s(p+p', \psi, 2, i)$ trifft zu für $c \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\underline{R \vdash f^c a_i = f^{p+p'} \omega \vec{a}}$$

Dann gilt $S \vdash f^c z_i = f^q \psi(\vec{s}, \phi(f^{p'} \omega \vec{z}), \vec{t})$.

Es ist $i \leq s(p+p', \omega) \leq s(p', \omega)$ und $u \equiv f^{p'} \omega \vec{z}$ normal.
Also erfüllt z_i , das weniger Skolemfunktionen als u enthält, die Behauptung im Widerspruch zur Voraussetzung über u .

2.3) sonst

Dann gilt nach 10.3 $R \vdash f^{p+p'} \omega \vec{a} = f^q \psi \vec{a}$.

$\phi(u)$ stehe an der Stelle k in v . Wegen $s(q, \psi) \geq k$ gilt $s(p+p', \omega) \geq k$ und aus 10.3 folgt insbesondere $S \vdash z_k = \phi(f^{p'} \omega \vec{z})$. Da $\phi(f^{p'} \omega \vec{z})$ normal ist, erfüllt z_k die Behauptung im Widerspruch zu der Voraussetzung über u .

10.5 Folgerung

Erfüllen alle in $v \in T(S)$ auftretenden $f^q \psi \vec{s}$ ($q \in \mathbb{N}_0$) die Eigenschaft $(p, \psi, 3)$ und hängt v von u ab, so ist $f^p u = v$ für kein $p \in \mathbb{N}_0$ in S ableitbar.

§ 11 Das Entscheidungsverfahren für die Klasse
 =====
 alle $(\text{alle}, f^1) \wedge \text{Her}(\infty)$
 =====

11.1 Ausgezeichnete Menge, Abhängigkeitsfolge

- 1) Sei M eine endliche Menge von Gleichungen.
 $\bar{T}(M)$ sei die Menge derjenigen Terme aus M , die die linken und rechten Seiten der Gleichungen von M bilden.
 M heißt normal, wenn alle Terme aus $\bar{T}(M)$ schwachnormal sind und für alle $f^p \varphi \vec{b} \in \bar{T}(M)$ ($p, \varphi, 3$) zutrifft ($p \in N_0$).
- 2) Ein Paar (M, N) normaler Mengen heißt ausgezeichnet, wenn gilt:
 - a) $N \subseteq M$.
 - b) Ist $f^p a = f^q a \in N$ ($p, q \in N_0$), so gilt:
 - b.1) $p < q$;
 - b.2) Es gibt kein $p', q' \in N_0$ mit $f^{p'} a = f^{q'} a \in N$ und $(p', q') \neq (p, q)$.
 - b.3) Für alle Terme t aus N der Gestalt $f^c a$ ($c \in N_0$) gilt: $c \leq q$.
 - c) Gilt für $p \in N_0$ $f^p a = s \in N$ mit $s \neq f^q a$ für alle $q \in N_0$, so gilt:
 - c.1) In $\bar{T}(M \setminus N)$ gibt es keinen Term der Gestalt $f^c a$ ($c \in N_0$).
 - c.2) Ist für $e, h \in N_0$ $f^e a = f^h a \in N$, so ist $e < h = p$.
 - c.3) Ist $u = v \in N$ und ist $u \neq v$ verschieden von $f^e a = f^p a$ und $f^p a = s$, so gilt:
 - i) Für alle $c \in N_0$ ist $u \neq f^c a$.
 - ii) Ist $v = f^d a$ ($d \in N_0$), so gilt $d < p$.
- 3) Eine Menge N heißt ausgezeichnet, wenn (N, N) ein Paar ausgezeichneter Mengen ist.

- 4) Eine endliche Folge $(c_1, \dots, c_m)$, $m \in \mathbb{N}$, heißt Abhangigkeitsfolge bzgl. M, wenn gilt:
M ist normal und fur alle $i=1, \dots, m-1$ gibt es $p, q \in \mathbb{N}_0$ und eine Skolemfunktion φ mit
 $f^p c_i = f^q \varphi \vec{b} \in M$ und $c_{i+1} \in \{b_1, \dots, b_{s(q, \varphi)}\}$.
- 5) Eine Abhangigkeitsfolge $(c_1, \dots, c_m)$ bzgl. M heißt zyklenfrei, wenn alle $c_1, \dots, c_m$ paarweise verschieden sind.
- 6) Eine Abhangigkeitsfolge F erfullt die Eigenschaft (+) bzgl. eines Paares (M, N) ausgezeichneter Mengen, wenn gilt:
 - i) F ist zyklenfrei.
 - ii) Ist $\emptyset \neq F = (c_1, \dots, c_m)$, so tritt c_m nicht auf der linken Seite einer Gleichung von N auf, aber es gibt $p \in \mathbb{N}_0$, $v \in T(S)$ mit
 $f^p c_m = v \in M \setminus N$.

11.2 Bemerkung

Ist (M, N) ein Paar ausgezeichneter Mengen, so ist es in N wichtig, ob ein Term auf der linken oder rechten Seite einer Gleichung steht. In $M \setminus N$ dagegen betrachten wir wie bisher $u = v$ oder $v = u$, je nachdem wie es gerade passend ist.

11.3 Folgerung

- 1) Ist eine Abhangigkeitsfolge $(c_1, \dots, c_m)$ nicht zyklenfrei, so gibt es kein $\vec{t} \in T(S)^n$ mit $S \vdash g(\vec{t})$ fur alle $g \in M$.
- 2) Fur jede zyklusfreie Abhangigkeitsfolge $(c_1, \dots, c_m)$ bzgl. M ist $m \leq$ Anzahl der freien Variablen von M.

Beweis von 1):

Sei $(c_1, \dots, c_m)$ nicht zyklischfrei. O.B.d.A sei $c_1 = c_m$ und $c_1, \dots, c_{m-1}$ seien paarweise verschieden. Für $i=1, \dots, m-1$ gibt es $p_i, q_i \in \mathbb{N}_0$, Skolemfunktionen φ_i und $\vec{b}_i \in T(S)^n$ mit $f^{p_i} c_i = f^{q_i} \varphi_i \vec{b}_i \in M$ und $c_{i+1} \in \{b_{i1}, \dots, b_{is(q_i, \varphi_i)}\}$.

Angenommen es gäbe $\vec{t} \in T(S)^n$ mit $S \vdash g(\vec{t})$ für alle $g \in M$. Dann würde für $i=1, \dots, m-1$ gelten:

$$S \vdash f^{p_i} s_i = f^{q_i} \varphi_i \vec{t}, s_i \in \{t_1, \dots, t_n\}, s_{i+1} \in \{t_1, \dots, t_{s(q_i, \varphi_i)}\}.$$

Also hänge s_i von s_{i+1} ab und insbesondere hänge s_1 von s_m ab. Wegen $s_1 = s_m$ ist das nach 10.5 unmöglich.

11.4 Lemma

1) Seien $f^c a = f^d a$, $f^e a = f^h a \in M(c, d, e, h \in \mathbb{N}_0)$. Dann gibt es berechenbare $l, l' \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $t \in T(S)$ gilt:

$$S \vdash f^c t = f^d t \text{ und } S \vdash f^e t = f^h t \iff S \vdash f^l t = f^{l'} t.$$

2) Seien $f^c a = f^d a$, $f^e a = s \in M(c, d, e \in \mathbb{N}_0)$, $c < d$, $c \leq e$; sei $s \neq f^h a$ für alle $h \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es ein berechenbares $l \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $t \in T(S)$ und $\vec{t} \in T(S)^n$ gilt:

$$S \vdash f^c t = f^d t \text{ u. } S \vdash f^e t = s(t, \vec{t}) \iff S \vdash f^c t = f^d t \text{ u. } S \vdash f^l t = f^1 s(t, \vec{t}).$$

Beweis:

Zu 1)

Sei o.B.d.A $c < d$, $e < h$, $c \leq e$. Es gibt $k, k' < d-c$, $\lambda \leq \lambda' \in \mathbb{N}_0$ mit $e + k = c + \lambda(d-c)$ und $h + k = c + \lambda'(d-c) + k'$.

Damit gilt für alle $t \in T(S)$:

$$S \vdash f^c t = f^d t \text{ u. } S \vdash f^e t = f^h t \iff S \vdash f^c t = f^d t \text{ u. } S \vdash f^c t = f^{c+k'} t$$

Ist $k' = 0$, so sind $l := c$ und $l' := d$ die gewünschten Zahlen. Sonst ist $c < c+k' < d$ und wir wiederholen das Verfahren, indem wir jetzt aber (c, d) bzgl. $(c, c+k')$ normalisieren. Nach spätestens $(d-c)$ Schritten bricht der Algorithmus ab.

Zu 2)

Es gibt $k < d-c$ und $\lambda \in \mathbb{N}_0$ mit $e + k = c + \lambda (d-c)$.

Aus $1 := k$ folgt die Behauptung.

11.5 Satz

Sei $(M, N) = (\{u_1 = v_1, \dots, u_{k(M)} = v_{k(M)}\},$

$$\{u_1 = v_1, \dots, u_{l(M)} = v_{l(M)}\})$$

ein Paar ausgezeichnetener Mengen mit $M \neq N$.

Sei K eine Abhängigkeitsfolge bzgl. M und N ,

die die Eigenschaft (+) erfüllt.

Dann gibt es M', N', K' mit folgenden Eigenschaften:

I. Ist $M' = \{\perp\}$, so gilt:

Für alle $\vec{t} \in T(S)^n$ gibt es

$i \in \{1, \dots, k(M)\}$ mit $S \not\models u_i(\vec{t}) = v_i(\vec{t})$.

II. Ist $M' \neq \{\perp\}$, so gilt:

1) $(M', N') = (\{u_1' = v_1', \dots, u_{k(M')} = v_{k(M')} \},$

$$\{u_1' = v_1', \dots, u_{l(M')} = v_{l(M')} \})$$

ist ein Paar ausgezeichnetener Mengen.

K' ist eine Abhängigkeitsfolge, die die

Eigenschaft (+) bzgl. (M', N') erfüllt. Die

freien Variablen von M' sind in denen von

M enthalten.

2) $k(M) > k(M')$ oder

$[k(M) = k(M') \text{ und } l(M') > l(M)]$ oder

$[k(M) = k(M') \text{ und } l(M) = l(M') \text{ und } K \not\subseteq K']$.

3) Für alle $\vec{t} \in T(S)^n$ gilt:

(Für alle $i = 1, \dots, k(M)$: $S \models u_i(\vec{t}) = v_i(\vec{t}) \iff$

$\iff$ Für alle $i = 1, \dots, k(M')$: $S \models u_i'(\vec{t}) = v_i'(\vec{t})$).

Beweis durch Fallunterscheidung nach der Form der in M auftretenden Gleichungen

1. Fall: $f^p \varphi \vec{b} = f^q \psi \vec{c} \in M$, $p, q \in \mathbb{N}_0$

Da die beiden Terme $(p, \varphi, 3)$ bzw. $(q, \psi, 3)$ erfüllen, gilt nach 10.3 für alle $\vec{s}, \vec{t} \in T(S)^n$:

$$St f^p \varphi \vec{t} = f^q \psi \vec{s} \iff$$

$$Rt f^p \varphi \vec{a} = f^q \psi \vec{a} \text{ und } St t_i = s_i \text{ für } i=1, \dots, s(p, \varphi).$$

Falls $Rt f^p \varphi \vec{a} = f^q \psi \vec{a}$ gilt, ersetze man überall in $M \setminus \{f^p \varphi \vec{b} = f^q \psi \vec{c}\}$ b_i durch c_i für $i=1, \dots, s(p, \varphi)$ und erhalte damit M' , $N' := K' := \emptyset$.

Sonst sei $M' := \{\perp\}$; N', K' seien beliebig, da für alle $\vec{t} \in T(S)^n$ gilt: $S \not\models f^p \varphi \vec{b}(\vec{t}) = f^q \psi \vec{c}(\vec{t})$.

2. Fall $f^p a = f^q \psi \vec{b} \in M$ mit $a \in \{b_1, \dots, b_{s(q, \psi)}\}$.

Wegen Satz 10.5 wählen wir $M' := \{\perp\}$; N', K' seien beliebig.

3. Fall: sonst

Ist $K = \emptyset$, so sei $p := \min \{p' \mid f^{p'} b \in \bar{T}(M \setminus N)\}$.

(p existiert wegen $M \not\approx N$). Sei u ein Term aus $M \setminus N$ der Gestalt $f^p a$ mit $a \in \{b \mid f^p b \in \bar{T}(M \setminus N)\}$ und sei $u = v \in M \setminus N$.

Ist $K = (c_1, \dots, c_m, a)$, so sei $u = v \in M \setminus N$ mit

$$u \equiv f^p a \text{ und } p = \min \{p' \mid f^{p'} a \in \bar{T}(M \setminus N)\}$$

In beiden Fällen tritt nach Voraussetzung a nicht auf der linken Seite einer Gleichung von N auf.

3.1 $v \equiv f^q a$ mit $q \in \mathbb{N}_0$.

3.1.1 $q = p$

$$M' := M \setminus \{u = v\}, \quad N' := N, \quad K' := K.$$

3.1.2 $q \neq p$

Nach Konstruktion von p ist $p < q$.

Fall a) Neben u und v gibt es keinen weiteren Term $f^c a$, $c \in \mathbb{N}_0$, in $\bar{T}(M \setminus N)$.

Man ersetze in N alle Terme $f^d a$ mit $d > q$ durch $f^{p+1} a$ mit $1 := d - q - \lambda(q-p)$ und $1 \leq q-p$ ($d, 1, \lambda \in \mathbb{N}_0$). Das ergibt $\tilde{N}$. $M' := (M \setminus N) \cup \tilde{N}$; $N' := \tilde{N} \cup \{u=v\}$, $K' := \emptyset$.

Fall b) Es gibt $u'=v' \in M \setminus N$, $(u'=v') \nVdash (u=v)$ mit $u \equiv f^c a$, $v' \equiv f^d a$; $c, d \in \mathbb{N}_0$.

Nach Lemma 11.4.1 gibt es eine Gleichung $u''=v''$, so daß für alle $\vec{t} \in T(S)^n$ gilt:

$$S \vdash u''(\vec{t}) = v''(\vec{t}) \iff S \vdash u(\vec{t}) = v(\vec{t}) \text{ und } S \vdash u'(\vec{t}) = v'(\vec{t}).$$

$$M' := (M \setminus \{u=v, u'=v'\}) \cup \{u''=v''\}, \quad N' := N, \quad K' := K.$$

Fall c) Es gibt $u'=v' \in M \setminus N$, $u' \equiv f^c a$ ($c \in \mathbb{N}_0$), $v' \nVdash f^d a$ für alle $d \in \mathbb{N}_0$ und Fall b) treffe nicht zu.

Nach Konstruktion von p ist $c > p$. Nach 11.4.2 gibt es eine Gleichung $v = v''$ mit $v'' \equiv f^1 v'$, $1 \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $\vec{t} \in T(S)^n$ gilt:

$$S \vdash u(\vec{t}) = v(\vec{t}) \text{ und } S \vdash u'(\vec{t}) = v'(\vec{t}) \iff S \vdash u(\vec{t}) = v(\vec{t}) \text{ und } S \vdash v(\vec{t}) = v''(\vec{t}).$$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach der Gestalt von v'' : ($e \in \mathbb{N}_0$)

i) $v'' \equiv f^e b$

Nach Voraussetzung (Fall c) ist $a \nVdash b$. Da für ein $1 \in \mathbb{N}_0$ $v'' \equiv f^1 v'$ und $v' \in \bar{T}(M \setminus N)$ gilt, tritt b nicht auf der linken Seite einer Gleichung von N auf. Man ersetze in $M \setminus \{u=v, u'=v'\}$ alle Terme der Gestalt $f^k u$, $k \in \mathbb{N}_0$, durch $f^k v''$. Dadurch entsteht $\tilde{M}$ und $\tilde{N}$.

$$M' := \tilde{M} \cup \{u=v, v=v''\}, \quad N' := \tilde{N} \cup \{u=v, v=v''\}, \quad K' := \emptyset.$$

ii) $v'' \equiv f^e \varphi \vec{a}$ und es gibt $i \in \{1, \dots, n\}$, $1', 1'' \in \mathbb{N}_0$ mit $S \vdash f^{1'} a_i = f^{1''} \varphi \vec{a}$

Angenommen, es gibt $\vec{t} \in T(S)^n$ mit $S \vdash g(\vec{t})$ für alle $g \in M$. Wegen $f^p a = f^q a \in M$ mit $p < q$ können dann v'' und insbeson-

derer v' die Eigenschaft $(e, \varphi, 3)$ bzw. $(e-1, \varphi, 3)$ nicht erfüllen im Widerspruch zur Normalität von M .

$M' := \{\perp\}$; N', K' seien beliebig.

iii) $v \equiv f^e \varphi \vec{b}$ und für alle $l \in \mathbb{N}_0$ treffe $(l, \varphi, 3)$ zu.

Man verfähre ebenso wie in i).

3.2 $v \equiv f^q b$ mit $a \neq b, q \in \mathbb{N}_0$.

Man ersetze in $M \setminus \{u=v\}$ alle Terme $f^l u$ durch $f^l v$ ($l \in \mathbb{N}_0$). Dadurch entstehen $\tilde{M}$ und $\tilde{N}$. Da b nicht auf der linken Seite von N vorkommt, können wir definieren:

$M' := \tilde{M} \cup \{u=v\}$, $N' := \tilde{N} \cup \{u=v\}$, $K' := \emptyset$.

3.3 $v \equiv f^q \varphi \vec{b}, q \in \mathbb{N}_0$

Fall a): es gibt $j \in \{1, \dots, s(q, \varphi)\}$ mit $b_j \in K$

$K \cup \{b_j\}$ ist eine nicht zyklisierende Abhängigkeitsfolge.

Wegen 11.4.1 definieren wir $M' := \{\perp\}$;

N', K' seien beliebig.

Fall b): sonst

Sei $p_1 := \inf \{ k \mid \exists i \exists l (S \vdash f^l a_i = f^{q+k} \varphi \vec{a}) \} \cup \{\infty\}$.

b1) $\max \{ q' \mid \exists u \in \bar{T}(M) (u \equiv f^{q'} a) \} < p+p_1$

Man ersetze in $M \setminus \{u=v\}$ alle Terme $f^l u$, $l \in \mathbb{N}_0$, durch $f^l v$ und erhält $\tilde{M}$ und $\tilde{N}$.

$M' := \tilde{M} \cup \{u=v\}$, $N' := \tilde{N} \cup \{u=v\}$, $K' := \emptyset$.

b2) $\max \{ q' \mid \exists u \in \bar{T}(M) (u \equiv f^{q'} a) \} \geq p+p_1$

Sei $l_1 := \min \{ l \mid \exists i (S \vdash f^l a_i = f^{q+p_1} \varphi \vec{a}) \}$,

$i_1 := \min \{ i \mid S \vdash f^{l_1} a_i = f^{q+p_1} \varphi \vec{a} \}$.

Man ersetze in $M \setminus \{u=v\}$ alle Terme $f^l u$, $l \in \mathbb{N}_0$, durch:

$$\begin{cases} f^{q+1} \varphi \vec{b} & \text{falls } l < p_1; \\ f^{l_1+l-p_1} b_{i_1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dadurch erhält man $\tilde{M}$ und $\tilde{N}$. Falls in $\tilde{N}$ eine Gleichung der Gestalt $f^{k'}_{b_{11}} = f^{k'}_{b_{11}}$, $k, k' \in \mathbb{N}_0$, auftritt, normalisieren wir die Terme $f^{m'}_{b_{11}} \in \tilde{T}(N)$ ($m' \in \mathbb{N}_0$) wie in 3.1.2.a und erhalten $\tilde{N}$.

i) Für jede Gleichung in $\tilde{N}$ der Form $f^{h'}_{b_{11}} = \hat{v}'$
 hat $\hat{v}'$ die Gestalt $f^{h'}_{b_{11}}$ ($h, h' \in \mathbb{N}_0$)

Dann sei $M' := \tilde{M} \cup \{u=v\}$, $N' := \tilde{N} \cup \{u=v\}$, $K' := \emptyset$.

ii) Es gibt $h \in \mathbb{N}_0$, $\hat{v}' \in \tilde{T}(\tilde{N})$ mit $f^{h'}_{b_{11}} = \hat{v}' \in \tilde{N}$ und
 $\hat{v}' \neq f^{h'}_{b_{11}}$ für alle $h' \in \mathbb{N}_0$.

Da (M, N) ausgezeichnet ist, ist $f^{h'}_{b_{11}} = \hat{v}'$ die einzige Gleichung mit der Eigenschaft ii).

$M' := \tilde{M} \cup \{u=v\}$, $N' := (\tilde{N} \cup \{u=v\}) \setminus \{f^{h'}_{b_{11}} = \hat{v}'\}$, $K' := K \cup \{b_{11}\}$

K' ist nach Voraussetzung von Fall b) zyklonfrei und erfüllt die Eigenschaft (+).

11.6 Folgerung

Zu jeder Menge M von Gleichungen gibt es ein berechenbares M' mit folgenden Eigenschaften:

- I. Ist $M' = \{\perp\}$, so gibt es für alle $\vec{t} \in T(S)^n$ $g \in M$ mit $S \not\models g(\vec{t})$.
- II. Ist $M' \neq \{\perp\}$, so ist M' ausgezeichnet und für alle $\vec{t} \in T(S)^n$ gilt:
 $S \vdash g(\vec{t})$ für alle $g \in M \iff S \vdash g(\vec{t})$ für alle $g \in M'$.

Beweis:

Durch 11.5 erhält man ein Verfahren zur Berechnung von M' ; dieses terminiert, da wegen der Beschränktheit der zyklonfreien Abhängigkeitsfolgen durch 11.5.II.2) eine wohlfundierte Ordnung definiert wird.

11.7 Definition von $A(a,p)$

Seien S und M wie üblich gegeben.

Für freie Variablen a aus M und für $p \in N_0$ sei $A(a,p)$ die kleinste Menge, die folgende Eigenschaften erfüllt: ($p', q \in N_0$)

1) Ist $f^{p'} a = f^q \vec{b} \in M$ und $p \leq p'$, so gilt:

$$A(a,p) = \{ b_1, \dots, b_{s(q,\varphi)} \} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq s(q,\varphi)} A(b_i, 1).$$

2) Ist $f^{p'} a = f^q b \in M$, $a \neq b$ und $p \leq p'$, so gilt:

$$A(a,p) = A(b,q).$$

11.8 Folgerung

Für alle a aus einer ausgezeichneten Menge M und $p \in N_0$ gilt:

1) $A(a,p) \subseteq \{ \text{freie Variablen von } M \}$.

2) Zu jedem $f^p a \in \bar{T}(M)$ existiert höchstens eine Folge $(v_{11} = v_{12}, \dots, v_{k1} = v_{k2}) \in M$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $v_{11} = f^{\tilde{p}} a$ mit $\tilde{p} \geq p$ ($\tilde{p} \in N_0$).

ii) Hat v_{k2} die Gestalt $f^q a'$, so tritt a' nicht auf der linken Seite in M auf ($q \in N_0$).

iii) Alle v_{i1}, v_{i2} ($i=1, \dots, k-1$) und v_{k1} haben die Gestalt $f^{q(i,j)} b_{ij}$ ($j=1, 2, (i,j) \neq (k,2), q(i,j) \in N_0$).

iv) Für $i=1, \dots, k-1$ hat $v_{(i+1)1}$ die Gestalt $f^{p(i)} v_{i2}$ ($p(i) \in N_0$).

Falls v_{k1} existiert,

ist v_{k1} eindeutig definiert und wir bezeichnen b_{k1} mit $\sigma(a)$.

3) Für alle $f^p a \in \bar{T}(M)$ ist $A(a,p)$ berechenbar und für alle $\vec{t} \in T(S)^n$ mit $S \vdash g(\vec{t})$ für alle $g \in M$ gilt: Für alle $b \in A(a,p)$ hängt $a(\vec{t})$ von $b(\vec{t})$ ab.

- 4) Ist $a \in A(a, p)$, so gibt es kein $\vec{t} \in T(S)^n$ mit $S \vdash g(\vec{t})$ für alle $g \in M$.

Beweis:

1) und 2) folgen aus der Definition der ausgezeichneten Menge und aus der Definition von $A(a, p)$.

Zu 3):

Existiert zu $f^p a \in \bar{T}(M)$ $\sigma(a)$ nicht, so ist $A(a, p) = \emptyset$.
Sonst ist wegen 2) $A(a, p) = A(\sigma(a), q(k1))$ d.h.

$$A(a, p) = \begin{cases} A(\sigma(a), q(k1)) = \\ = \{a'_1, \dots, a'_{s(p', \varphi)}\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq s(p', \varphi)} A(a'_i, 0) & \text{falls } v_{k2} \equiv \\ & \equiv f^{p'} \varphi \vec{a}; \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $\vec{t} \in T(S)^n$ existiert mit $S \vdash g(\vec{t})$ für alle $g \in M$, so hängt $a(\vec{t})$ aufgrund dieser Eigenschaften von jedem $b(\vec{t})$ mit $b \in A(a, p)$ ab.

Zur Berechnung von $A(a, p)$ genügt es nun, immer nur das zugehörige $A(\sigma(a), p(k1))$ zu betrachten.

$A(a, p')$ errechnet sich folgendermaßen ($k, l \in \mathbb{N}$):

- i) Man suche das zugehörige $A(\sigma(a), p(k1))$.
Ist $A(\sigma(a), p(k1)) = \emptyset$, so ist $A(a, p) = \emptyset$ und das Verfahren breche ab.
Sonst betrachte man alle Paare ($i=1, \dots, s(p', \varphi)$)
($\{a'_1, \dots, a'_{s(p', \varphi)}\}$, $A(a'_i, 0)$).
- ii) Zu jedem Paar ($\{b_1, \dots, b_k\}$, $A(b, 0)$) suche man das zugehörige $A(\sigma(b), q') = \{c_1, \dots, c_l\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq l} A(c_i, 0)$.
Ist $\{c_1, \dots, c_l\} \not\subseteq \{b_1, \dots, b_k\}$, so betrachte man alle Paare ($\{b_1, \dots, b_k\} \cup \{c_1, \dots, c_l\}$, $A(c_j, 0)$) für $j \in \{1, \dots, l\}$ mit $c_j \notin \{b_1, \dots, b_k\}$;
sonst breche das Verfahren ab.

Da die Menge der freien Variablen von M endlich ist, bricht das Verfahren in jedem Fall ab.

$A(a,p)$ ist leer oder gleich der Vereinigung der ersten Komponenten aller in der Berechnung auftretenden Paare.

4) folgt direkt aus 3).

11.9 Stark ausgezeichnete Menge, $B(M)$

- 1) Eine ausgezeichnete Menge M heißt stark ausgezeichnet bzgl. $(a_1, \dots, a_{n+m})$, wenn in M höchstens die freien Variablen $a_1, \dots, a_{n+m}$ ($n, m \in \mathbb{N}$) auftreten und wenn für alle Skolemfunktionen φ gilt:
 - i) Die Stellenzahl k von φ ist kleiner gleich n .
 - ii) φ tritt nur in der Form $f^P \varphi(a_1, \dots, a_k)$ auf.
- 2) Sind $b_1, \dots, b_l$ die freien Variablen einer ausgezeichneten Menge M , so sei $B(M)$ die Menge derjenigen $b \in \{b_1, \dots, b_l\}$, die höchstens in Termen der Gestalt $f^P \varphi \vec{c} \in \bar{T}(M)$ vorkommen.

11.10 Satz

Sei M eine stark ausgezeichnete Menge bzgl. $(a_1, \dots, a_{n+m})$. Dann gilt:

- 1) $B(M) \subseteq \{a_1, \dots, a_{n+m}\}$.
- 2) Es gibt eine lineare Ordnung $\prec$ auf $a_1, \dots, a_{n+m}$ so daß für alle $c \in B(M)$ und $d \notin B(M)$ gilt:
 $c \prec d \iff c \in A(d, 0)$.
- 3) $PLIF \vdash F(M)$ mit $F(M) \equiv$

$$(\forall x_1 \dots \forall x_n (\bigwedge_{u=v \in RO} u(\vec{x}) = v(\vec{x})) \rightarrow \exists x_{n+m} (\bigwedge_{g \in M} g(\vec{x})))$$

$\iff$ Es gibt eine Permutation π von $\{1, \dots, n+m\}$ und

$G(M)$ mit $PLIF \vdash G(M)$ und

$$G(M) \equiv (\forall x_1 \dots \forall x_n \bigwedge_{u=v \in RO} u(\vec{x}) = v(\vec{x})) \rightarrow \\ \rightarrow Q_{\pi(1)} x_{\pi(1)} \dots Q_{\pi(n+m)} x_{\pi(n+m)} (\bigwedge_{g \in M} g(\vec{x})),$$

wobei für $i, j = 1, \dots, n+m$ gilt:

$$Q_i = \begin{cases} \forall & \text{falls } a_i \in B(M); \\ \exists & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $(a_i < a_j \iff (\text{es gibt } k, k' \text{ mit } 1 \leq k < k' \leq n+m \\ \text{und } i = \pi(k) \text{ und } j = \pi(k'))).$

Beweis:

Zu 2) Da alle Terme $f^p \varphi \vec{a} \in \bar{T}(M)$ ($p, \varphi, 3$) erfüllen, gilt:

$$(i < j \text{ und } a_j \in A(a, 0)) \Rightarrow a_i \in A(a, 0).$$

Daraus folgt 2).

Zu 3) " $\Leftarrow$ " klar.

" $\Rightarrow$ ": Beweis durch Induktion nach der Anzahl k der Gleichungen g von M

$k = 1$:

$$a) g \equiv f^p a = f^q b, p, q \in N_0$$

Dann erfüllt $\exists x \exists y g(\frac{a}{x} \frac{b}{y})$ die Behauptung.

$$b) g \equiv f^p a_i = f^q \varphi \vec{a}, p, q \in N_0, i \in \{1, \dots, n+m\}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $\vec{t} \in T(S)^n$ mit $S \vdash g(\vec{t})$

Also gilt $a_i \notin A(a_i, p) = A(a_i, 0) = \{a_1, \dots, a_{s(q, \varphi)}\}$,

d.h. $i > s(q, \varphi)$.

Da $f^q \varphi(a(q, \varphi, 3))$ erfüllt, hat $f^p a_i(\vec{t})$ die Gestalt $f^{q'} \psi \vec{s}$ mit $q' \in N_0$ und $\vec{s} \in T(S)^n$. Nach 10.3 gilt $R \vdash f^q \varphi \vec{a} = f^{q'} \psi \vec{a}$ und $S \vdash s_1 = \vec{t}_1, \dots, S \vdash s_{s(q, \varphi)} = \vec{t}_{s(q, \varphi)}$.

Also gilt $S \vdash f^{p_{a_i}}(\vec{t}) = f^q \varphi \vec{a}(\vec{t})$ für beliebige $t_1, \dots, t_{s(q, \varphi)}$. Die Behauptung wird erfüllt durch:

$$\forall x_1 \dots \forall x_{s(q, \varphi)} \exists x_i \forall \vec{x}' \in (\vec{a})_{\vec{x}} ,$$

wobei $\vec{x}' := (x'_{s(q, \varphi)+1}, \dots, x'_{n+m-1})$ gilt mit

$$x'_j := \begin{cases} x_j & \text{falls } s(q, \varphi) < j < i; \\ x_{j+1} & \text{falls } i \leq j < n+m. \end{cases}$$

$$k \Rightarrow k+1$$

Zwischenbehauptung:

Es gibt $l \in \{1, \dots, n+m\}$, $f^p a_1 = f^q s \in M(p, q \in \mathbb{N}_0)$ mit $\mathfrak{S}(a_1) = a_1$ und $s \equiv a_1$, $l \neq 1 \in \{1, \dots, n+m\}$, oder mit $\mathfrak{S}(a_1) = a_1$ und $s \equiv \varphi \vec{a}$ und für $i=1, \dots, s(q, \varphi)$ ist $a_i \in B(M)$.

Wir betrachten $M' := M \setminus \{f^p a_1 = f^q s\}$, wobei $f^p a_1 = f^q s$ die Eigenschaften der Zwischenbehauptung besitzt.

Nach I.V. gelte der Satz für M' mit dem Präfix $Q' \pi'(1)^{x_{\pi'(1)}} \dots Q' \pi'(n+m)^{x_{\pi'(n+m)}}$ und der Ordnung $\prec'$.

1. Fall: $s \equiv a_1$,

Wegen $a_1 = \mathfrak{S}(a_1)$ kommen a_1 und a_1 , nicht auf der linken Seite in M' vor, d.h. $A_{M'}(a_1, 0) = A_M(a_1, 0) = \emptyset$.

Nach I.V. ist x_1 (bzw. $x_{1'}$) entweder ein Existenzquantor, der im Präfix links von allen Allquantoren steht, oder selbst ein Allquantor. Sei o.B.d.A $l = \pi'(k)$, $1' = \pi'(k')$ und $1 \leq k < k' \leq n+m$. Die Behauptung wird erfüllt durch:

$$Q' \pi'(i)^{x_{\pi'(i)}} := \begin{cases} \exists x_1 & \text{falls } i = 1; \\ \exists x_{1'} & \text{falls } i = 2; \\ Q' \pi'(i-2)^{x_{\pi'(i-2)}} & \text{falls } 1 \leq i-2 < k; \\ Q' \pi'(i-1)^{x_{\pi'(i-1)}} & \text{falls } k < i-1 < k'; \\ Q' \pi'(i)^{x_{\pi'(i)}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Fall $s \equiv \vec{\psi a}$ und für $i=1, \dots, s(q, \psi)$ ist $a_i \in B(M)$

Sei $i \in \{1, \dots, s(q, \psi)\}$. Es gilt $a_i \in B(M')$. Sei

$J := \{k' \mid \sigma(a_{k'}) = a_i\}$. Ist $a_i \notin B(M')$, so gilt für alle $\hat{k} \in J$:

$$a_{\hat{k}} \prec' a_i, \quad Q_{\hat{k}} x_{\hat{k}} \equiv \exists x_{\hat{k}}, \quad A_M(a_{\hat{k}}, 0) = \emptyset$$

Es ist $A_M(a_{\hat{k}}, 0) = \{a_1, \dots, a_{s(q, \psi)}\}$.

Ist $a_i \in B(M')$, so ist $J = \{a_i\}$. In beiden Fällen erfüllt ähnlich wie im Fall $k = 1, b)$ dasjenige Präfix die Behauptung, in dem für alle $\hat{k} \in J$ $x_{\hat{k}}$ Existenzvariablen sind, die rechts von den Allvariablen $x_1, \dots, x_{s(q, \psi)}$ und links von allen anderen Allvariablen stehen, und in dem sonst die Reihenfolge des Präfixes von M' eingehalten wird. Folgende Ordnung $\prec$ induziert also die Behauptung $(j, j' = 1, \dots, n+m, j \neq j')$:

$$a_j \prec a_{j'} \iff \begin{cases} a_j \prec' a_{j'}, & \text{falls } j, j' \in J \text{ oder } j, j' \notin J; \\ a_j \prec' a_{s(q, \psi)} & \text{falls } j \notin J, j' \in J; \\ a_{s(q, \psi)} \prec' a_{j'}, & \text{falls } j \in J, j' \notin J. \end{cases}$$

Beweis der Zwischenbehauptung:

Angenommen, die Zwischenbehauptung trafe nicht zu.

Dann gilt für jede freie Variable a aus M mit $f^p a = s^i \in M$, daß $\sigma(a)$ existiert, $A(\sigma(a), 0) \neq \emptyset$ ist und ein $\mu(a)$ existiert mit $\mu(a) \in A(\sigma(a), 0)$ und $A(\mu(a), 0) \neq \emptyset$. Wegen $\mu(a) \notin A(\mu(a), 0)$ ist die Folge $A(a, 0) \supsetneq A(\mu(a), 0) \supsetneq A(\mu^2(a), 0) \supsetneq \dots \supsetneq A(\mu^k(a), 0) \supsetneq \dots$ streng monoton fallend im Widerspruch zur Endlichkeit von $A(a, 0)$.

11.11 Satz

Sei $F \equiv \exists x_1 \dots \exists x_k (Q_1 v_1 \dots Q_1 v_1 (\bigwedge_{g \in M_1} g(\vec{x}, \vec{v})) \wedge Q_1' w_1 \dots Q_1' w_1 (\bigwedge_{g \in M_2} g(\vec{x}, \vec{w})))$.

M_1, M_2 seien stark ausgezeichnete Mengen mit höchstens den freien Variablen $a_1, \dots, a_n, a_1', \dots, a_n'$ ($1 \leq n, n+n-1'=k+1$).

M_1 sei ausgezeichnet bzgl. $(a_1, \dots, a_n, n-1'+1)$.

M_2 sei ausgezeichnet bzgl. $(a_1, \dots, a_{1-1}, a_1', \dots, a_n', n-1'+1)$.

1) $M_1 \cup M_2$ sei eine ausgezeichnete Menge mit

$a \in A(a, 0)$ für alle $a \in \{a_1, \dots, a_n, a_1', \dots, a_n'\}$.

2) Für $i=1, 2$ gelte:

Wird a in M_i durch eine Existenzvariable v_j (bzw. w_j) ersetzt, so wird a in $M_{\neq i}$ durch eine Allvariable w_j (bzw. v_j) ersetzt.

3) Ist $v_{\hat{1}}$ (bzw. $w_{\hat{1}}$) eine Allvariable, $v_{\hat{1}}$ (bzw. $w_{\hat{1}}$) eine Existenzvariable mit $\hat{1} < \hat{l}$ und sind a, b die zu $v_{\hat{1}}, v_{\hat{1}}$ (bzw. $w_{\hat{1}}, w_{\hat{1}}$) korrespondierenden freien Variablen aus M_1 (bzw. M_2), so gilt $a \in A(b, 0)$.

Dann gilt:

Es gibt $i, j \in \{1, \dots, l\}$, so daß $G \equiv$

$$\exists x_1 \dots \exists x_k \exists x (Q_1 v_1 \dots Q_{i-1} v_{i-1} Q_{i+1} v_{i+1} \dots Q_1 v_1 (\bigwedge_{g \in M_1} g(\vec{x}, \vec{v})) \wedge Q_1' w_1 \dots Q_{j-1} w_{j-1} Q_{j+1}' w_{j+1} \dots Q_1' w_1 (\bigwedge_{g \in M_2} g(\vec{x}, \vec{v})))$$

die Bedingungen 2) und 3) erfüllt und gilt:

$$\text{PLIF} \vdash \forall \vec{x} (\bigwedge_{u=v \in RO} u(\vec{x})=v(\vec{x})) \rightarrow F \Leftrightarrow \text{PLIF} \vdash \forall \vec{x} (\bigwedge_{u=v \in RO} u(x)=v(X)) \rightarrow G.$$

Beweis:

Anstelle von all-(existenz-) quantifizierten Variablen aus M_1 zu sprechen, reden wir von All-(Existenz-) Variablen aus M_1 ($i=1, 2$).

1. Fall: Es gibt eine gemeinsame Allvariable

$$\underline{v \equiv v_i \equiv w_j \text{ in } M_1 \text{ und } M_2 \text{ (} i, j \in \{1, \dots, l\} \text{)}}$$

Der Allquantor $\forall v$ läßt sich aus $Q_1 v_1 \dots Q_1 v_l$ und $Q_1' w_1 \dots Q_1' w_l$ herausziehen und durch einen Existenzquantor $\exists v$ ersetzen -

G erfüllt offensichtlich die Behauptung.

2. Fall: sonst

Dann ist für jede Allvariable aus M_1 die korrespondierende Variable aus M_{+1} eine Existenzvariable.

Zwischenbehauptung:

Es gibt eine Existenzvariable in $\vec{v}$ oder $\vec{w}$, die links von jeder Allvariable ihres Präfixes steht.

Diese Existenzvariable läßt sich links vor die anderen Existenzvariablen ziehen und die korrespondierende Allvariable läßt sich durch diese Existenzvariable ersetzen, woraus die Behauptung folgt.

Beweis der Zwischenbehauptung

Angenommen, jede Existenzvariable y_1 in M_1 stehe rechts von einer Allvariable y_2 in M_1 . Wegen 2) wird y_2 in M_{+1} existenzquantifiziert und steht dort nach Voraussetzung rechts von einer Allvariablen y_3 usw.

Wegen Voraussetzung 3) gilt $y_2 \in A(y_1, 0)$, $y_3 \in A(y_2, 0)$ und da $M_1 \cup M_2$ ausgezeichnet ist: $y_2, y_3 \in A(y_1, 0)$.

Es gibt eine nichtabbrechende Folge $y_1, y_2, y_3, \dots$ mit $y_j \in A(y_1, 0)$ für $1 \leq i < j$.

Wegen $y_i \in \{\vec{v}, \vec{w}\}$ für $i \geq 1$ gibt es mindestens ein

$1 \leq i_0 \leq j_0 \leq 2l+1$ mit $y_{i_0} \equiv y_{j_0}$ und

$y_{j_0} \in A(y_{i_0}, 0)$ im Widerspruch zu 1).

11.12 Lemma

Sei M eine ausgezeichnete Menge mit den freien Variablen $V = \{a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n\}$ und Skolem-funktionen, die nur in der Form $\varphi(a_1, \dots, a_m)$ oder $\varphi(a_1, \dots, a_{1'-1}, a'_1, \dots, a'_m)$, $m \in \{1, \dots, n\}$ auftreten.

Dann gibt es zwei stark ausgezeichnete Mengen M_1 bzgl. $(a_1, \dots, a_n, n-1'+1)$ und M_2 bzgl.

$(a_1, \dots, a_{1'-1}, a'_1, \dots, a'_n, n-1'+1)$ so, daß die nach 11.10.3) konstruierten Formeln $G(M_1)$ und $G(M_2)$ die Eigenschaften 11.11.2-3 erfüllen.

Beweis:

Da M ausgezeichnet ist, ist für alle $a \in V \cap (a)$, falls es existiert, eindeutig definiert und $A(a, 0) = A(\bar{\sigma}(a), 0)$.

$$M_1 := M \cap \{u = v \in M \mid \exists a \exists p(p \in N_0 \text{ u. } u \equiv f^p a) \text{ u. } (A(a, 0) = \emptyset \text{ o. } \exists q, q' m(q, q', m \in N_0 \text{ u. } f^q \bar{\sigma}(a) = f^{q'} \varphi(a_1, \dots, a_m) \in M))\};$$

$$M_2 := M \setminus M_1.$$

M_1 und M_2 sind wegen der Voraussetzung über die Form der Skolemfunktionen stark ausgezeichnet.

Für alle $a \in V \setminus B(M_1)$, $i=1, 2$, $b \in V$, $p, q \in N_0$ gilt:

$$f^p a = f^q b \in M \text{ oder } f^p b = f^q a \in M \implies b \in V \setminus B(M_1).$$

Also ist $(V \setminus B(M_1)) \cap (V \setminus B(M_2)) = \emptyset$ und damit für $i=1, 2$

$$V \setminus B(M_i) \subseteq B(M_{\neq i}).$$

In den nach 11.10.3 konstruierten Formeln $G(M_1)$ und $G(M_2)$ werden die Elemente von $V \setminus B(M_1)$ existenzquantifiziert und die Elemente von $B(M_{\neq 1})$ allquantifiziert.

Durch die lineare Ordnung $\prec$ wird Bedingung 11.11.3 erfüllt.

11.13 Satz

Die Formelklasse $\text{alle}(\text{alle}, f^1) \wedge \text{Her}(\infty)$ ist entscheidbar bzgl. der Erfüllbarkeit.

Beweis:

Nach § 6 genügt es, Formeln F der Gestalt

$$\forall \vec{x} \left(\bigwedge_{u=v \in RO} u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \right) \wedge \forall \vec{x} \forall \vec{x}' \left(\bigwedge_{g \in M} \neg g(\vec{x}, \vec{x}') \right)$$

zu betrachten.

F ist erfüllbar genau dann, wenn $\text{PLIF} \not\vdash \neg F$ gilt.

$\neg F$ ist äquivalent zu $H(M)$:

$$H(M) := \forall \vec{x} \left(\bigwedge_{u=v \in RO} u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \right) \rightarrow \exists \vec{x} \exists \vec{x}' \left(\bigwedge_{g \in M} g(\vec{x}, \vec{x}') \right).$$

Nach 8.6 ist wegen der schwachen Normalität der in 9.2 vorkommenden Terme entscheidbar, ob Voraussetzung 9.2 erfüllt ist.

1. Fall: Voraussetzung 9.2 trifft nicht zu

Es ist nachzuprüfen, ob $H(M)$ in der einelementigen Struktur wahr ist.

2. Fall: Voraussetzung 9.2 trifft zu

Nach 11.6 ist $H(M)$ entweder in PLIF nicht ableitbar oder es gibt eine berechenbare ausgezeichnete Menge M' so, daß $\text{PLIF} \vdash H(M) \Leftrightarrow \text{PLIF} \vdash H(M')$ gilt.

Gibt es eine freie Variable a aus M' mit $a \in A(a, 0)$ (entscheidbar wegen 11.8.3)), so ist $H(M')$ in PLIF nicht ableitbar.

Sonst gibt es (11.12) zwei stark ausgezeichnete Mengen M_1 und M_2 und nach 11.10.3 zwei zu $H(M_1)$ und $H(M_2)$ bzgl. der Ableitbarkeit äquivalente Formeln $G(M_1)$ und $G(M_2)$, die die Voraussetzungen von 11.11 erfüllen.

(2n)-malige Anwendung von 11.11 ergibt

$$\text{PLIF} \vdash H(M') \iff \text{PLIF} \vdash H(M_1) \text{ und } \text{PLIF} \vdash H(M_2).$$

Da M_1 stark ausgezeichnet ist, gilt für $i=1, 2$:

$$\text{PLIF} \vdash \neg H(M_1) \leftrightarrow \forall \vec{x} \left(\bigwedge_{u=v \in R_0} u(\vec{x})=v(\vec{x}) \wedge \left(\bigvee_{g \in M_1} \neg m(\vec{x}) \right) \right).$$

In $\neg H(M_1)$ haben alle Skolemfunktionen die gleichen Argumente. $\neg H(M_1)$ ist also erfüllbarkeitsäquivalent zu einer Gleichheitsformel H_1' mit einer einstelligen Funktionsvariablen f . Nach [Ra] ist die Erfüllbarkeit von H_1' entscheidbar und damit auch die Erfüllbarkeit von F .

§ 12 Entscheidbarkeit der Klassen K und Sy

$$\subseteq \exists^\infty \forall^2 \exists^\infty \text{ (alle; } \emptyset \text{)}$$

12.1 V-P-Normalform, (A/x) , $A \subset B$, $A \sim B$

- a) Sei $\mathbb{P}$ eine nichtleere, endliche Menge von Prädikatenvariablen, V eine nichtleere, endliche Menge von Objektvariablen.

$\langle V - \mathbb{P} \rangle$ sei die nichtleere, endliche Menge aller Primformeln, die sich aus Elementen der Menge $\mathbb{P}$ mit den Objektvariablen der Menge V bilden lassen.

Eine V-P-Konjunktion ist eine Konjunktion aus Elementen von $\langle V - \mathbb{P} \rangle$, in der jede Primformel aus $\langle V - \mathbb{P} \rangle$ genau einmal (negiert oder nicht negiert) auftritt und in der kein anderes Konjunktionsglied vorkommt.

- b) Eine V-P-Normalform ist eine Disjunktion

$$\bigvee_{i=1, \dots, n} A_i \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

aus n paarweise inäquivalenten V-P-Konjunktionen

$A_1, \dots, A_n$. Für $n = 0$ oder für eine leere Menge M sei:

$$\bigvee_{i=1, \dots, 0} A_i := \bigvee_{i \in M} A_i := \perp.$$

- c) Für eine Formel A und Objektvariablen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, sei $(A/x_1, \dots, x_n)$ bzw. $(A/\vec{x})$ diejenige Formel, die entsteht, wenn in A alle diejenigen Primformeln samt zugehörigen Junktoren und Klammern gestrichen werden, die eine Objektvariable $y \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ enthalten.

- d) Wir schreiben $A \subset B$, wenn A, B Konjunktionen aus Basisformeln sind und A äquivalent zu einer Teilkonjunktion von B ist.

$$A \sim B : \Leftrightarrow A \subset B \text{ und } B \subset A.$$

12.2 Ausgezeichnete (R,m,n,p)-V-P-Formeln

- 1) Seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Sei R eine 2-stellige Prädikatenvariable, die die Axiome $\forall x \forall y (Rxy \vee Ryx \vee x = y)$ und $\forall x \forall y (\neg Rxy \vee \neg Ryx)$ (Antisymmetrieaxiom) erfüllt. $\mathcal{P}$ sei eine nichtleere endliche Menge von Prädikatenvariablen.

V, V_0, V_n, W_0, W_n seien folgende Mengen von Objektvariablen:

$$V := \{a_1, \dots, a_m\}, \quad V_0 := V \cup \{x, y\}, \quad V_n := V_0 \cup \{z_1, \dots, z_n\}, \\ W_0 := V \cup \{x\}, \quad W_n := W_0 \cup \{z_1, \dots, z_n\}.$$

$$2) \quad U(m, x) := \bigwedge_{i=1, \dots, m} x \neq a_i;$$

$$Z(m) := \begin{cases} T & \text{falls } m = 1, \\ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} a_i \neq a_j & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$X(m, 0) := T;$$

$$X(m, n) := \bigwedge_{i=1, \dots, n} (U(m, z_i) \wedge x \neq z_i \wedge y \neq z_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} z_i \neq z_j;$$

$$Y(m, n) := (X(m, n) / \vec{a}, x, \vec{z});$$

- 3) Sei $M := (M(0), M(n), N(1), \dots, N(p)) \in \mathbb{N}^{p+2}$ ein $p+2$ -Tupel endlicher Mengen. M heißt Indexsystem.
 $\hat{M} := M(0) \cup M(n).$

$$\bigvee_{i \in M(0)} A_{i0}(x, y), \quad \bigvee_{i \in M(n)} A_{i0}(x, y, z), \quad \bigvee_{i \in N(j)} A_{ij}(x, z)$$

($j=1, \dots, p$) seien resp. V_0 - $\mathcal{P}$, V_n - $\mathcal{P}$ und $\mathcal{V}_n$ - $\mathcal{P}$ -Normal-

formen. Für $i=1, \dots, q$ seien $L_i(x)$ Teilkonjunktionen von W_0 -P-Konjunktionen.

4) Eine ausgezeichnete (R, m, n, p) -V-P-Formel

ist eine Formel F der Gestalt:

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y [(U(m, x) \wedge U(m, y) \wedge Rxy) \rightarrow \\ & \rightarrow [\bigvee_{i \in M(0)} A_{i0}(x, y) \vee \bigvee_{i \in M(n)} \exists z_1 \dots \exists z_n (A_{i0}(x, y, \vec{z}) \wedge X(m, n))]] \wedge \\ & \wedge_{j=1, \dots, p} \bigwedge \forall x [U(m, x) \rightarrow \bigvee_{i \in N(j)} \exists z_1 \dots \exists z_n (A_{ij}(x, \vec{z}) \wedge Y(m, n))] \wedge \\ & \wedge_{i=1, \dots, q} \bigwedge \forall x (L_i(x) \wedge U(m, x)) \wedge Z(m) \wedge \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx \vee x = y) \wedge \\ & \wedge \forall x \forall y (\neg Rxy \vee \neg Ryx). \end{aligned}$$

5) M-Hauptglieder sind alle Formeln $A_{ij}(\vec{x})$

$(j \in \{0, \dots, p\}, i \in \hat{M} \text{ bzw. } N(j))$.

Ein M-Doppelglied $D(x, y)$ ist eine V_0 -IP-Konjunktion, zu der es ein M-Hauptglied $H(\vec{x})$ und $k, l \in \mathbb{N}$ gibt mit $k \neq l$ und $D(x_k, x_l) \subset H(\vec{x})$.

Ein M-Einzelglied $E(x)$ ist eine W_0 -IP-Konjunktion, zu der es ein M-Hauptglied $H(\vec{x})$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $E(x_k) \subset H(\vec{x})$.

Ein M-Grundglied G ist eine V-IP-Konjunktion, zu der es ein M-Hauptglied $H(\vec{x})$ gibt mit $G \subset H(\vec{x})$.

6) Ein Indexsystem M einer ausgezeichneten (R, m, n, p) -V-P- $\{R\}$ -Formel heißt normal, falls es folgenden 6 Bedingungen genügt:

(MI) Alle M-Grundglieder sind äquivalent.

(MII) Zu jedem M-Einzelglied $E(x)$ und jedem $j \in \{1, \dots, p\}$ gibt es $i \in N(j)$ mit $E(x) \subset A_{ij}(x, \vec{z})$.

(MIII) Zu je zwei inäquivalenten M-Einzelgliedern $E(x)$ und $E'(x)$ gibt es ein M-Doppelglied $D(x, y)$

mit

$$E(x) \wedge E'(y) \wedge Rxy \subset D(x,y) \quad \text{oder}$$

$$E'(x) \wedge E(y) \wedge Rxy \subset D(x,y).$$

(MIV) Zu jedem M-Doppelglied $D(x,y)$ mit $Rxy \subset D(x,y)$ gibt es ein $\hat{M}$ -Hauptglied $H(\vec{x})$ mit $D(x_1, x_2) \subset H(\vec{x})$.

(MV) Zu jedem $i \in \{1, \dots, q\}$ existiert ein M-Einzelglied $E(x)$ mit $L_i(x) \subset E(x)$.

(MR) Für jedes M-Einzelglied $E(x)$ gilt $\neg Rxx \subset E(x)$.
Für jedes M-Doppelglied $D(x,y)$ mit $Rxy \subset D(x,y)$ gilt:

$$\neg Rxx \wedge \neg Ryy \wedge Rxy \wedge \neg Ryx \subset D(x,y).$$

7) Sei F eine ausgezeichnete (R, m, n, p) -V- $\mathcal{P}$ -Normalformel mit Indexsystem M .

Die zu F gehörige M' -Normalformel $F_{M'}$ ist eine ausgezeichnete (R, m, n, p) -V- $\mathcal{P}$ -Normalformel mit normalem Indexsystem $M' \subseteq M$; außerdem sei $L_1(x), \dots, L_q(x)$ eine maximale Folge paarweise inäquivalenter M' -Einzelglieder.

8) Ein M-Einzelglied $E(x)$ heißt regulär, wenn es ein $\hat{M}$ -Hauptglied $H(\vec{x})$ mit $E(x_1) \wedge E(x_2) \subset H(\vec{x})$ gibt.

Sonst heißt $E(x)$ singulär.

M heißt vollreguläres (bzw. singuläres) Indexsystem, wenn alle M-Einzelglieder regulär (bzw. singulär) sind. M heißt reguläres Indexsystem, wenn es sowohl reguläre wie singuläre M-Einzelglieder gibt.

12.3 Definition von K

K sei die Menge aller ausgezeichneten $(R, m, 1, p)$ -V- $(\mathcal{P} \cup \{R\})$ -Formeln $(m, p \in \mathbb{N}, \mathcal{P}$ beliebige endliche Menge von Prädikatenvariablen).

12.4 Definition von Sy

Sy sei die Menge aller ausgezeichneten $(\dagger, m, 1, p)$ -V- $\mathbb{P}$ -Formeln $(m, p \in \mathbb{N})$ ohne Antisymmetrieaxiom, für deren Indexsystem M gilt:

$$(+)\left\{\begin{array}{l} \text{Zu jedem } \hat{M}\text{-Hauptglied } H(\vec{x}) \text{ existiert} \\ \text{ein } \hat{M}\text{-Hauptglied } H'(\vec{x}) \text{ mit} \\ H(\vec{x}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \sim H'(\vec{x}) . \end{array}\right.$$

In $\mathbb{P}$ kommt nach 12.1 das Gleichheitszeichen nicht vor.

12.5 Bemerkung

Jede Formel aus $\exists^\infty \forall^2 \exists^\infty$ -(alle; $\emptyset$) ist zu einer ausgezeichneten $(\dagger, m, n, p)$ -V- $\mathbb{P}$ -Formel ohne Antisymmetrieaxiom äquivalent [Schü4, Wi]. Man sieht leicht, daß damit jede $\exists^\infty \forall^2 \exists^\infty$ -(alle; $\emptyset$)-Formel bzgl. der Erfüllbarkeit zu einer ausgezeichneten $(R, m, 2, p)$ -V- $\mathbb{P} \cup \{R\}$ -Formel äquivalent ist.

12.6 Satz

Für alle Prädikatenvariablen R, alle endlichen Mengen von Prädikatenvariablen $\mathbb{P}$ und alle $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ ist jede (R, m, n, p) -V- $\mathbb{P} \cup \{R\}$ -Formel mit vollregulärem, normalem Indexsystem endlich erfüllbar.

Der Beweis verläuft analog dem Beweis für $(\dagger, m, n, p)$ -V- $\mathbb{P}$ -Formeln ohne Asymmetrieaxiom in [Wi, §4].

12.7 Länge einer Folge, die Relation $\triangleleft$

- 1) Mit $N_0^{<\omega}$ bezeichnen wir die Menge der endlichen Folgen aus N_0 . Elemente von $N_0^{<\omega}$ bezeichnen wir mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.
- 2) Die Länge $l(\alpha)$ einer Folge $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $k \in \mathbb{N}$, sei die Anzahl k der Elemente von α .
- 3) Seien $\alpha, \beta \in N_0^{<\omega}$.
 - i) $\alpha \triangleleft \beta$ (" α vor β ") gelte genau dann, wenn $l(\alpha) < l(\beta)$ und für alle $i=1, \dots, l(\alpha)$ $\alpha_i = \beta_i$ gilt.
 - ii) $\alpha \trianglelefteq \beta : \Leftrightarrow \alpha \triangleleft \beta$ oder $\alpha = \beta$.

12.8 - 12.11 Entscheidbarkeit von K

12.8 Ein Baum $\mathcal{L}$ eines Einzelgliedes $E(x)$

Sei M ein normales Indexsystem einer ausgezeichneten (R, m, n, p) -V- $\{P \cup \{R\}$ -Formel.

Ein Baum $\mathcal{L}$ eines M -Einzelgliedes $E(x)$ ist ein Formelbaum mit genau zwei Ästen, bestehend aus $\hat{M}$ -Hauptgliedern $H(\vec{x})$, für die $E(x_1) \subset H(\vec{x})$ oder $E(x_2) \subset H(\vec{x})$ gilt.

$\mathcal{L}$ wird nach folgenden Regeln gebildet:

- ($\mathcal{L}0$) Ist $E(x_1) \wedge E(x_2) \wedge R x_1 x_2 \subset A_{i0}(\vec{x})$, $i \in \hat{M}$, so sei $\mathcal{L}0 \equiv A_{i0}(\vec{x})$ die Wurzel des Baumes.
- ($\mathcal{L}1$) Sei $j = 1, 2$. Wenn für die M -Doppelglieder $D_j(x, y)$ und die $\hat{M}$ -Hauptglieder $H_j(\vec{x})$ gilt:

$$D_j(x_j, x_3) \subset \mathcal{L}0 \text{ und}$$

$$((j0) D_j(x_1, x_2) \wedge R x_1 x_2 \subset H_j(\vec{x}) \text{ oder}$$

$$(j1) D_j(x_2, x_1) \wedge R x_1 x_2 \subset H_j(\vec{x})),$$

so sei $\mathcal{L}(0, 2^{j+k(j)}) := H_j(\vec{x})$, wobei $k(j)$ folgendermaßen definiert ist:

$$k(j) := \begin{cases} 0 & \text{falls } (j0) \text{ zutrifft;} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$x_{k(j)+1}$ heißt ausgezeichnete Variable von $\mathcal{L}(0, 2^{j+k(j)})$.

(L2) Seien $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}_0^{<\omega}$ mit $l(\alpha) \geq 2$ und $\alpha = (\gamma, 2^{j+k})$, $j \in \{1, 2\}$, $k \in \{0, 1\}$.

Gilt $\mathcal{L}\alpha \neq \mathcal{L}\beta$ für alle β mit $\beta \triangleleft \alpha$ und gilt für das M-Doppelglied $D(x, y)$ und das M-Hauptglied $H(\vec{x})$:

$$D(x_{k+1}, x_3) \in \mathcal{L}\alpha \text{ und}$$

$$((j0) D(x_1, x_2) \wedge R x_1 x_2 \in H(\vec{x}) \text{ oder}$$

$$(j1) D(x_2, x_1) \wedge R x_1 x_2 \in H(\vec{x})),$$

so sei $\mathcal{L}(\alpha, 2^{j+k(j)}) := H(\vec{x})$, wobei $k(j)$ wie in (L1) definiert ist.

$x_{k(j)+1}$ sei die ausgezeichnete Variable von $\mathcal{L}(\alpha, 2^{j+k(j)})$.

Falls es keine Doppel- und Hauptglieder gibt, so daß (L1) oder (L2) auf $\mathcal{L}\alpha$ zutreffen, sei $\mathcal{L}\alpha$ Endformel des Baumes $\mathcal{L}$.

Für alle $\alpha \neq 0$, für die $\mathcal{L}\alpha$ existiert, ist die ausgezeichnete Variable x_k definiert und es gilt $(\mathcal{L}\alpha/x_k) \sim E(x_k)$.

12.9 Grad eines Baumes, die Formel F' , Repräsentant, Grad eines Indexsystems.

1) Sei $\mathcal{L}$ ein Baum eines Einzelgliedes.

i) Ist $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}0$, so sei $g(\mathcal{L}) := (1, 1)$.

ii) Hat $\mathcal{L}$ genau zwei Äste mit den Endformeln $\mathcal{L}\alpha(1)$ und $\mathcal{L}\alpha(2)$, und ist $\alpha(1) = (0, 2^1 + k, \alpha')$, $\alpha(2) = (0, 2^2 + k', \alpha'')$ mit $k, k' \in \{0, 1\}$, $\alpha(1), \alpha(2), \alpha', \alpha'' \in \mathbb{N}_0^{<\omega}$,

so sei $g(\mathcal{L}) := (g'(\alpha(1)), g'(\alpha(2)))$ mit : $(i=1,2)$.

$$g'(\alpha(i)) := \begin{cases} \omega & \text{falls es } \gamma \triangleleft \alpha(i) \text{ gibt mit} \\ & \mathcal{L}\gamma \sim \mathcal{L}\alpha(i); \\ l(\alpha(i)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

ω sei eine Zahl größer als alle ganzen Zahlen.

- 2) Sei M ein reguläres, normales Indexsystem einer ausgezeichneten (R, m, n, p) -V- $\mathcal{P} \cup \{R\}$ -Formel F .

Sei $E_1(x), \dots, E_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, eine maximale Folge paarweise inäquivalenter singulärer M -Einzelglieder.

Jedem $E_i(x)$, $i=1, \dots, k$, ordnen wir eine neue freie Variable b_i zu.

F' entstehe aus F dadurch, daß jedes M -Hauptglied $H(\vec{x})$ mit $E_i(x_1) \subset H(\vec{x})$, $1 \in \mathbb{N}$, durch $H(\vec{x})$ ($\vec{x}_1$) ersetzt wird und zu dieser neuen Formel eine äquivalente $(R, m+k, n, p')$ -V $\cup \{b_1, \dots, b_k\}$ - $\mathcal{P} \cup \{R\}$ -Formel F' gebildet wird.

Ein normales Indexsystem M' von F' heißt Nachfolger-system von M (abgekürzt: $M < M'$).

- 3) Sei $M_1 < M_2 < \dots < M_l$ ($1 \in \mathbb{N}$) eine Folge normaler Indexsysteme von ausgezeichneten

$(R, m_i, 1, p_i)$ -V- $\mathcal{P} \cup \{R\}$ -Formeln ($i=1, \dots, l$; $m_i, p_i \in \mathbb{N}$).

I. Ein Baum $\mathcal{L}'$ aus M_l "liegt über" einem Baum $\mathcal{L}$ aus M_k ($1 \leq k < l$), wenn gilt:

i) Hat ein Ast von $\mathcal{L}'$ die Endformel $\mathcal{L}'\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{N}_0^{<\omega}$) mit $g'(\alpha) = \omega$, so gilt:

Für alle β mit $\beta \triangleleft \alpha$, für die $\mathcal{L}\beta$ existiert, ist $\mathcal{L}\beta \subset \mathcal{L}'\beta$.

ii) Hat ein Ast von $\mathcal{L}'$ die Endformel $\mathcal{L}'\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{N}_0^{<\omega}$) mit $g'(\alpha) \neq \omega$, so gilt:

- 1) Für alle β mit $\beta \leq \alpha$ existiert $\mathcal{L}\beta$;
- 2) für alle β mit $\beta < \alpha$ ist $\mathcal{L}\beta \subset \mathcal{L}'\beta$;
- 3) ist $\mathcal{L}\alpha$ eine $\{\vec{a}, x, y\}$ - $\{P \cup \{R\}$ -Konjunktion, so ist $\mathcal{L}\alpha \subset \mathcal{L}\beta$;
- 4) ist $\mathcal{L}\alpha$ eine $\{\vec{a}, x, y, z\}$ - $\{P \cup \{R\}$ -Konjunktion, so gibt es $k' \in \{k, \dots, l-1\}$ und ein singuläres $M_{k'}$ -Einzelglied $F(x)$ mit $(\mathcal{L}\alpha/z) \subset F(z)$, das in $M_{k'+1}$ durch $F(b)$ ersetzt wurde und es gilt:
 $\mathcal{L}\alpha^{(z)}_b \subset \mathcal{L}'\alpha$.

Außerdem liege jeder Baum über sich selbst.

II. Ein Baum $\mathcal{L}$ von $E(x)$ aus M_k ($k \in \{1, \dots, l\}$) heißt Repräsentant in M_1 für die Menge

$O(\mathcal{L}) := \{\mathcal{L}' \mid \mathcal{L}' \text{ ist Baum in } M_1 \text{ und liegt über } \mathcal{L}\},$

wenn gilt:

- i) Es gibt einen Baum $\mathcal{L}'$ von $E'(x)$ aus $O(\mathcal{L})$ mit:
 - 1) $g(\mathcal{L}') = g(\mathcal{L})$;
 - 2) für alle M_1 -Einzelglieder $E''(x)$ mit $E(x) \subset E''(x)$ gibt es einen Baum $\mathcal{L}''$ von $E''(x)$ aus M_1 mit folgender Eigenschaft:
 Ersetzt man in jedem M_1 -Hauptglied von $\mathcal{L}''$ das ausgezeichnete $E''(x)$ durch $E'(x)$, so ist der so entstandene Baum identisch mit $\mathcal{L}'$;
- ii) jeder Baum $\mathcal{L}$ aus $O(\mathcal{L})$ mit $g(\mathcal{L}) = g(\mathcal{L})$ erfüllt i);
- iii) es gibt keinen Baum $\mathcal{L}$ aus M_j mit $1 \leq j < k$, $O(\mathcal{L}) \subsetneq O(\mathcal{L})$ und den Eigenschaften i) und ii).

III) Für jeden Grad g sei $z(g)$ die Anzahl der Repräsentanten in M_1 mit Grad g .

$G(M_1) := ((g, z(g)) \mid z(g) \neq 0)$ sei eine lexikographisch geordnete (endliche) Folge.

Ist $G_1 = (c_1, \dots, c_r)$, $G_2 = (d_1, \dots, d_s)$, $r, d \in \mathbb{N}$, so gelte:

$G_1 < G_2 \iff$ es gibt $t \in \mathbb{N}$ mit $t < \min\{r, s\}$,
 $\forall i \in \{0, \dots, t-1\} (c_{r-i} = d_{s-i})$
 und $c_{r-t} < d_{s-t}$ bzgl. der lexikographischen Ordnung.

12.10 Satz

Sei $M_1 < M_2 < \dots < M_l < M'$ eine Folge normaler, regulärer Indexsysteme ¹⁺¹ausgezeichneter

$(R, m_i, l, p_i) - V_i - \{P \cup \{R\}\text{-Formeln } F_i,$

$(i=1, \dots, l+1; m_i, p_i \in \mathbb{N})$.

Dann läßt sich M'_{l+1} zu einem normalen Indexsystem M_{l+1} von F_{l+1} so erweitern, daß $G(M_1) > G(M_{l+1})$ gilt.

Beweis

Jeder Baum $\mathcal{L}'$ aus M'_{l+1} liegt über mindestens einem Baum $\mathcal{L}$ aus M_1 und es gilt $g(\mathcal{L}') \leq g(\mathcal{L})$.

Zwischenbehauptung:

Ist $\mathcal{L}$ aus M_k ($1 \leq k \leq l$) Repräsentant in M_1 , erfüllt $\mathcal{C} \in O_{M_1}(\mathcal{L})$ 12.9.3)II.i) und ist $\mathcal{L}'$ ein Baum aus M'_{l+1} , der über $\mathcal{C}$ liegt mit $g(\mathcal{L}') = g(\mathcal{C}) [= g(\mathcal{L})]$, so läßt sich M'_{l+1} so erweitern, daß $\mathcal{L}'$ 12.9.3)II.i) bzgl. $O(\mathcal{L})$ erfüllt und die Erweiterung ein normales Indexsystem von F_{l+1} ist.

Damit läßt sich M'_{l+1} so zu M_{l+1} erweitern, daß gilt:

Jeder Repräsentant in M_l , über dem in M_{l+1} ein
(+) Baum mit gleichem Grad liegt, ist auch Repräsentant in M_{l+1} .

Nur wenn alle Bäume über einem Repräsentanten einen kleineren Grad haben, kann die Anzahl der Repräsentanten steigen.

Kommt in einem Baum aus M_l ein singuläres M_l -Einzelglied vor, so hat jeder darüberliegende Baum aus M_{l+1} einen kleineren Grad.

Da M_l ein reguläres Indexsystem ist, gibt es singuläre M_l -Einzelglieder. Also gibt es einen Repräsentanten $\mathcal{C}$ in M_l , so daß $\mathcal{C}$ in keiner normalen Erweiterung von M_{l+1} Repräsentant ist. Angewendet auf den (lexikographisch) größten Grad in M_l mit einem solchen Repräsentanten, folgt aus (+):

$$G(M_{l+1}) < G(M_l).$$

Beweis der Zwischenbehauptung:

Sei $\mathcal{L}'$ Baum des M'_{l+1} -Einzelgliedes $E'(x)$, $\mathcal{C}$ Baum des M_l -Einzelgliedes $\tilde{E}(x)$ und $\mathcal{L}$ Baum des M_k -Einzelgliedes $E(x)$. Es gilt: $E(x) \subset \tilde{E}(x) \subset E'(x)$.

Wegen $g(\mathcal{L}') = g(\mathcal{C})$ treten in $\mathcal{C}$ keine singulären M_l -Einzelglieder auf.

Sei $E''(x)$ mit $\tilde{E}(x) \subset E''(x)$ ein M'_{l+1} -Einzelglied. Da F_{l+1} vollständige $V_1 - \mathcal{P} \cup \{R\}$ -Normalformen ($i \in \{0,1\}$) als Disjunktionsglieder hat, treten alle Hauptglieder $H(\vec{x})$, die aus Hauptgliedern von $\mathcal{L}'$ durch Ersetzen des ausgezeichneten $E'(x)$ durch $E''(x)$ entstehen, als Disjunktionsglieder in F_{l+1} auf. Wegen Eigenschaft 12.9.II.i2) von $\mathcal{C}$ für alle M_l -Einzelglieder $\hat{E}(x)$ mit $E(x) \subset \hat{E}(x)$ gilt das gleiche auch für alle M'_{l+1} -Einzelglieder $E'''(x)$ mit $\hat{E}(x) \subset E'''(x)$.

Da nur solche Bäume erzeugt werden, die die Eigenschaft MIV und MR erfüllen und da bzgl. MI, MII, MIII und MV nichts Neues hinzukommt, ist auch das erweiterte System normal.

12.11 Folgerung

Die Klasse K ist bzgl. der Erfüllbarkeit entscheidbar. Jede erfüllbare Formel aus K ist endlich erfüllbar.

Beweis:

Sei F eine Formel aus K. Man betrachte alle normalen Indexsysteme von F.

Ist eines vollregulär, so ist F endlich erfüllbar (12.6). Sind alle singular, so genügt es nachzuprüfen, ob F in einem Bereich I erfüllbar ist, dessen Kardinalität die maximale Zahl paarweise inäquivalenter Einzelglieder von F nicht übersteigt [Wi].

Sonst sind alle normalen Indexsysteme M von F regulär. Man konstruiere nach 12.9.2 alle Nachfolger von allen M, erweitere diese nach 12.10 zu Systemen mit kleinerem Grad und mache die gleiche Abfrage nach Vollregularität, Singularität und Regularität.

Da jede entstehende Kette $M_1 < \dots < M_1$ ($1 \in \mathbb{N}$) von regulären Nachfolgersystemen endlich ist, terminiert das Verfahren.

12.12 Folgerung

Die Klasse Sy ist entscheidbar bzgl. der Erfüllbarkeit. Jede erfüllbare Formel aus Sy ist endlich erfüllbar.

Der Beweis verläuft ganz analog dem Beweis für K. In den

einzelnen Definitionen und Beweisen ab 12.2 muß lediglich überall Rab ($a, b \in \{x, y\}$) mit den zugehörigen Quantoren und in 12.2.6) MIII, 12.8.($\mathcal{L}1$) und ($\mathcal{L}2$) außerdem die Behauptung ab "oder..." bzw. die Voraussetzung (j1) gestrichen werden. 12.2.6 MR falle vollständig weg. Wegen der Symmetrieeigenschaft 12.4(+) von Sy läßt sich die Zwischenbehauptung von 12.10 auch für Sy beweisen, woraus dann wie für K die Entscheidbarkeit folgt.

Literaturverzeichnis

- [Aan] Aanderaa, S.O.: On the decision problem for formulas in which all disjunctions are binary. In: J.E. Fenstad (Ed.): Proc of the second Scandinavian Logic Symp., North-Holl. Pu.Co. (1971) 4-14.
- [AaLe] Aanderaa, S.O.,
Lewis H.R.: Linear sampling and the AEA case of the decision problem. JSL 39 (1974) 519-548.
- [Ack] Ackermann, W.: Solvable cases of the decision problem. Amsterdam 1954.
- [Bö 1] Börger, E.: Reduktionstypen in Krom- und Hornformeln. Dissertation, Münster 1971.
- [Bö 2] Börger, E.: Eine entscheidbare Klasse von Kromformeln. ZMLG 19 (1973) 117-120.
- [Bö 3] Börger, E.: Reduktionstypen der klassischen Prädikatenlogik. Vorlesungsausarbeit, Münster 1972.
- [Bü] Büchi, J.R.: Turing-machines and the Entscheidungsproblem. Math. Annalen 148 (1962) 201-215.
- [ChK] Chang, C.C.,
Keisler, H.J.: An improved prenex normal form. JSL 27 (1962) 317-326.
- [Chu] Church, A.: A note on the Entscheidungsproblem, JSL 1 (1936) 40-41.
- [DKW] Dreben, B.,
Kahr, A.S.,
Wang H.: Classification of AEA formulas by letter atoms. Bull. AMS 68 (1962) 528-532.
- [Ehf] Ehrenfeucht, A.: Decidability of the theorie of one function. Not. AMS6 (1959) 268.

- [Gla] Gladstone, M.D.: Finite models for inequations. JSL 31 (1966) 581-592.
- [Göd] Gödel, K.: Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionskalküls. Monatshefte Math. Phys. 40 (1933) 433-443.
- [Go] Goldfarb, W.D.: Jacques Herbrand: Logical writings. Dordrecht 1971.
- [Gu 1] Gurevic, J.S.: Über die effektive Bestimmung der Erfüllbarkeit von Ausdrücken der engeren Prädikatenlogik. Algebra y Logika, Seminar 4 (1965) 71-85 (Russisch).
- [Gu 2] Gurevic, J.S.: On the decision problem for the pure restricted predicate calculus. Soviet Math. Doklady (1966) 217-219, 669-670.
- [Gu 3] Gurevic, J.S.: Semi-conservative reduction and decision problem for standard classes. Techn. Report, Ben Gurion University (1974).
- [He 1] Herbrand, J.: Recherches sur la théorie de la démonstration. Travaux de la soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie, Warschau 1930.
- [He 2] Herbrand, J.: Sur le problème fondamental de la logique mathématique. Comptes Rendus des séances de la soc.d. Sci. et d.Lettres de Varsovie. Warschau (1931) 1-45.
- [Hs 1] Hermes, H.: Entscheidungsproblem und Domino-spiele. In: Selecta Mathematica II, ed. K. Jacobs, Berlin, Heidelberg, New York (1970), 114-140.
- [Hs 2] Hermes, H.: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Berlin, Heidelberg, New York (1971).
- [HB] Hilbert, D., Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik. Vol I (1934) § 4-5; Vol.II (1939) § 3, 5.

- [KMW] Kahr, A.S.,
Moore, E.F.,
Wang, H.: Entscheidungsproblem reduced to
the AFA case. Proc. Nat. Acad.
Sc. 48 (1962) 365-377.
- [Kal] Kalmar, L.: Über die Erfüllbarkeit derjenigen
Zahlausdrücke, welche in der
Normalform zwei benachbarte All-
zeichen enthalten. Math. Ann.
108 (1933) 466-484.
- [KS] Kalmar, L.,
Suranyi, J.: On the reduction of the decision
problem. JSL 12 (1947) 65-73.
- [KK] Kreisel, G.,
Krivine, J.L.: Eléments de logique mathématique.
Paris 1967.
- [Kr 1] Krom, M.R.: The decision problem for a class
of first-order formulas in which
all disjunctions are binary.
ZMLG 13 (1967) 15-20.
- [Kr 2] Krom, M.R.: The decision problem for formulas
in prenex conjunctive normal form
with binary disjunctions. JSL 35
(1970) 210-216.
- [LeGo] Lewis, H.R.,
Goldfarb, W.D.: The decision problem for formulas
with a small number of atomic sub-
formulas. JSL 38 (1973) 471-480.
- [Löw] Löwenheim, L.: Über Möglichkeiten im Relativkal-
kul. Math. Ann. 76 (1915) 137-148.
- [Mi 1] Minsky, M.L.: Recursive unsolvability of Post's
problem of "Tag" and other top-
ics in theory of Turing machines.
Annals of Math. 74 (1961) 437-455.
- [Mi 2] Minsky, M.L.: Computation: Finite and infinite
machines. Prentice-Hall (1967).
- [Rab] Rabin, M.O.: Decidability of second-order
theories and automata on infinite
trees. Transl. AMS 141 (1969) 1-
35.

- [Rog] Rogers, H.(jr.): Certain logical reduction and decision problems. Annals of Math. 64 (1956) 264-284.
- [Rö] Rödding, D.: Reduktionstypen der Prädikatenlogik. Vorlesungsausarbeitung, München 1969.
- [Schü1] Schütte, K.: Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. 109 (1934) 572-603.
- [Schü2] Schütte, K.: Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln. Math. Ann. 110 (1934) 161-194.
- [Schü3] Schütte, K.: Einführung in die mathematische Logik. Vorlesungsausarbeitung, München 1967.
- [Schü4] Schütte, K.: Ansatz zum Entscheidungsverfahren für eine Formelklasse der Prädikatenlogik mit Identität. Universität München 1973.
- [Sc] Scott, D.: A decision method for validity of sentences in two variables. JSL 27 (1962) 477.
- [Sh] Shoenfield, J.: Mathematical logic. Reading (Mass.) 1967.
- [Sm] Smullian, R.M.: Theorie of formal systems. Princeton 1961.
- [Su] Suranyi, J.: Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe. Budapest 1959.
- [Tr] Trahtenbrot, B.A.: Impossibility of an algorithm for the decision problem in finite classes. Transl. AMS Ser.2, vol. 23 (1963) 1-5.
- [Tu] Turing, A.M.: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc. 2.42 (1937) 230-265; A correction: ibidem 2.43 (1937) 544-546.
- [Wi] Wirsing, M.: Ein Entscheidungsverfahren für eine Klasse von Formeln der klassischen Prädikatenlogik mit Identität. Diplomarbeit, München 1973.

L e b e n s l a u f

Name: Martin Hermann Friedrich Wirsing.

Geburt: 24. Dezember 1948 in Bayreuth.

Eltern: Karl Wirsing, Kaufmann, und Annelie Wirsing,
geb. Hacker.

Schule: 1955-1959 Lerchenbühl-Volksschule in Bayreuth;
1959-1968 Humanistisches Gymnasium
Christian Ernestinum Bayreuth;
1968 Abitur.

Studium: 1968-1970 Mathematik an der Universität
München;
1970-1971 Mathematik an der Universität
Paris VII;
1971 Maîtrise ès sciences mathématiques,
Univ. Paris VII;
1971-1974 Mathematik an der Universität
München;
1974 Diplom in Mathematik,
Universität München.

Familien-
stand: verheiratet seit dem 11. Juli 1974
mit Martine Wirsing, geb. Chausson.

